На правах рукописи

Некрасова Руслана Сергеевна

Регенеративное оценивание и его применение к системам с конечным буфером

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2012

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук*

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Морозов Евсей Викторович**
Официальные оппоненты:	**Рыков Владимир Васильевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования ФГБОУ ВПО «Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина»
	Рогов Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
Ведущая организация:	ФГБУН Институт проблем информатики Российской академии наук

Защита состоится 20 декабря 2012 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.190.03* на базе ФГБОУ ВПО «*Петрозаводский государственный университет*», расположенного по адресу: *185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *Петрозаводского государственного университета.*

Автореферат разослан «____» ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Р. В. Воронов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Стохастические модели телекоммуникационных систем обслуживания в настоящее время имеют широкое распространение. Предел среднего по времени значения случайного процесса является важной стационарной характеристикой при анализе таких систем. Если рассматриваемый случайный процесс является регенерирующим, то возможно построить несмещенные и состоятельные оценки требуемой стационарной характеристики на основе центральной предельной теоремы. В силу независимости и стохастической эквивалентности циклов, регенерирующие процессы охватывают широкий класс случайных процессов, что позволяет рассматривать регенеративный метод как один из наиболее мощных методов исследования. В частности, независимость циклов регенерации обеспечивает возможность использования развитого аппарата теории восстановления для теоретического анализа процессов, а также классических методов для построения оценок при имитационном моделировании и статистическом анализе.

Модели систем обслуживания с ограничениями, в частности, с конечным буфером играют важную роль в анализе современного телетрафика. В таких моделях поток, образованный потерянными заявками, часто является входным потоком для другого узла коммуникационной системы, а вероятность переполнения является ключевым показателем качества обслуживания. К потерям относится та часть поступающей нагрузки, которая не обслуживается из-за занятости обслуживающих устройств в момент поступления или переполнения буферов, предназначенных для ожидания в очереди. Отметим, что теоретический анализ систем обслуживания, как правило, ограничивается рассмотрением систем, поведение которых описывается марковскими процессами. Однако регенеративная структура позволяет анализировать и оценивать предельные характеристики, в частности, стационарную вероятность переполнения буфера для широкого класса немарковских процессов. В этом состоит одно из основных преимуществ регенеративного метода.

Степень разработанности. Регенеративный метод оценивания стационарных характеристик в полной мере изложен в книгах С. Асмуссена[1], М. А. Крэйна и О. Д. Лемуана[2]. Также стоит отметить работы П. Глинна, Д. Иглхарта и В. Витта, касающиеся статистического анализа регенеративных систем, условий применимости регенеративного метода, эффективности регенеративных оценок.

Цель диссертационной работы состоит в том, чтобы адаптировать регенеративный метод для вероятностного анализа и доверительного оценивания характеристик систем с конечным буфером, в частности, систем с потерями и систем с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты (под орбитой подразумевается дополнительный “буфер” бесконечного размера, в который попадает поток переполнения). Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Подробный обзор регенеративного метода оценивания стационарных характеристик.

2. Исследование регенеративной структуры систем с потерями с целью построения классических и альтернативных оценок стационарной вероятности потери на основе регенеративного метода.

3. Анализ условий стационарности систем с повторными вызовами, построение оценок основных характеристик на основе регенеративного метода в стационарном и нестационарном режимах.

4. Имитационное моделирование систем с конечным буфером, анализ эф-

---

[1] Asmussen S. Applied Probability and Queues. 2nd edition. New-York: Wiley, 2003. P. 476.

[2] Крэйн М. А., Лемуан О. Д. Введение в регенеративный метод анализа моделей. М.: Наука, 1982. С. 104.

фективности оценок основных характеристик системы с точки зрения величины дисперсии и скорости построения.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются методы теории восстановления, теории регенерирующих процессов, теории процессов накопления, а также методы статистического моделирования.

Научная новизна. В рамках анализа систем с потерями получено общее соотношение, связывающее стационарную вероятность потери со стационарной вероятностью занятости. На основе этого соотношения возможно повысить эффективность оценивания для ряда систем. Предложены альтернативные последовательности точек регенерации в системах с потерями, направленные на повышение эффективности моделирования. Получен ряд новых аналитических результатов для систем с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты, в том числе, найдено необходимое условие стационарности системы с N классами заявок и N орбитами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для определения области устойчивости и оценки качества сервиса широкого класса коммуникационных систем (с ограничениями на размер буфера), в том числе мобильных сетей связи.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Доказано соотношение, связывающее стационарную вероятность потери со стационарной вероятностью простоя обслуживающего канала для широкого класса немарковских систем, где потери могут быть вызваны различными причинами.

2. Получен ряд аналитических результатов для систем с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок. В том числе найдены альтернативные выражения для предельной вероятности блоки-

ровки в стационарном и в нестационарном режиме, исследована эффективность прямой и альтернативной оценки (оценки по остаточной длине цикла регенерации) вероятности занятости сервера на конечном интервале.

3. Получены необходимые условия стационарности систем с повторными вызовами и несколькими классами заявок (несколькими орбитами).

4. Для реализации имитационного моделирования разработано программное обеспечение. Полученные результаты экспериментов хорошо согласуются с проведенным теоретическим анализом.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Международный научный семинар "Advances in Methods of Information and Communication Technology" (19–20 мая 2009 г. Петрозаводск); Международный научный семинар "Advances in Methods of Information and Communication Technology" (25–26 мая 2010 г. Петрозаводск); Международный семинар "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems" в рамках конгресса ICUMT'10 (18–20 октября 2010 г. Москва); Modern Probabilistic Methods for Analysis and optimization of Information and Telecommunication Networks ("Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей, 21-я Белорусская школа-семинар по теории массового обслуживания) (3-5 февраля 2011 г. Минск); Международный семинар "Northern Triangular seminar 2011" (11-13 апреля 2011 г. Санкт-Петербург); Международный научный семинар "Advances in Methods of Information and Communication Technology" (28 апреля 2011 г. Петрозаводск); V Международный семинар "Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем" (10–16 октября 2011 г. Светлогорск); Международный научный семинар “Advances in Methods of Information and Communication Technology” (15–16 мая 2012 г. Петрозаводск); VIII Международная Петрозаводская конференция “Вероятностные методы в дискретной математике” (2–9 июня 2012 г. Петрозаводск); 9-й международный семинар “9th International workshop on retrial queue” (28-30 июня 2012 г. Севилья).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 статьи в журналах [1–3] (в том числе 2 работы в изданиях из перечня российских рецензируемых журналов [1, 2]), 3 статьи в сборниках трудов конференций [4–6] и 3 тезиса докладов [7–9]. Получено свидетельство о регистрации электронного ресурса [10].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка сокращений, библиографии, списка иллюстративного материала и приложения. Общий объем диссертации 124 страницы, из них 110 страниц текста, включая 16 рисунков и 10 таблиц. Библиография включает 79 наименований на 8 страницах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-07-00017.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе, которая носит обзорный характер, приведены используемые далее результаты теории случайных процессов. Основное внимание уделено регенерирующим процессам и их свойствам.

Случайный процесс $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ называется *регенерирующим*, если для некоторой последовательности случайных величин (с. в.) $0 \leq T_0 < T_1 < T_2 \ldots$ сегменты процесса $G_k := \{X(T_k + t) : 0 < t \leq T_{k+1} - T_k\}$, $k \geq 1$ (случайные элементы) независимые одинаково распределенные (н. о. р.) и не зависят от G_0.

Последовательность $\{T_k\}_{k\geq 0}$ называется *моментами или точками регенерации* (м. р.). Типичную длину цикла регенерации (ц. р.) будем обозначать через T. Регенерирующий процесс с *конечной* средней длиной цикла ($\mathsf{E}T < \infty$) называется *положительно возвратным.*

Регенерирующие процессы охватывают широкий класс случайных процессов, и их предельные средние по времени являются важной стационарной характеристикой при анализе многих стохастических систем. Если $\mathsf{E}T < \infty$ и $\mathsf{E}\int_0^T |f[X(t)]|dt < \infty$, где f – измеримая функция, то существует предел с вероятностью 1 (с в. 1)

$$r(t) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t f[X(s)]ds \to \frac{\mathsf{E}\int_0^T f[X(s)]ds}{\mathsf{E}T} := r \;\text{ при } t \to \infty. \qquad (1)$$

Если T – нерешетчатая с. в., то $f[X(t)] \Rightarrow f[X_\infty]$ при $t \to \infty$, где $\Rightarrow$ означает слабую сходимость, а X_∞ – с. в., причем $\mathsf{E}f[X_\infty] = r$.

Также в первой главе приведены основные результаты для процессов накопления, которые тесно связаны с регенерирующими процессами. В качестве типичных примеров процессов накопления отметим интеграл от измеримой функции f регенерирующего процесса: $\int_0^t f[X(s)]ds,\ t \geq 0$. Полезно также трактовать регенерирующие процессы времени ожидания $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ и длины очереди $\{\nu(t)\}_{t\geq 0}$ в системе обслуживания как процессы накопления.

Во второй главе изложен регенеративный метод доверительного оценивания параметра r – предельного значения величины $r(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f[X(s)]ds$ при $t \to \infty$. (Во всех рассматриваемых моделях $f \geq 0$.)

Как правило, на практике моделирование осуществляется в дискретном времени, т. е. рассматривается регенерирующий процесс $\{X_n\}_{n\geq 0}$. В дискретном времени (при $t \in \{t_k\}_{k\geq 0}$) м. р. и типичную длину ц. р. обозначим через $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ и β соответственно. В рассматриваемых далее моделях систем обслуживания имеет место следующая связь м. р. в дискретном и непрерывном времени: $T_k = t_{\beta_k}$, где $\{t_k\}_{k\geq 0}$ – моменты приходов заявок.

Пусть β – нерешетчатая с. в. и $Y_k := \sum_{i=\beta_{k-1}}^{\beta_k - 1} f(X_i),\ \ k \geq 1\ \ (\beta_0 = 0)$. ($\{Y_k\}$ – н. о. р. с. в. с типичным элементом Y.) Если моделирование в дискретном времени реализуется на основе фиксированного числа n ц. р., то задача сводится к построению оценки

$$r_n := \frac{\sum_{i=0}^{\beta_n - 1} f(X_i)}{\beta_n}. \tag{2}$$

Если $\mathsf{E}T < \infty$ и $\mathsf{E}Y < \infty$, то аналогично (1) $r_n \to r = \mathsf{E}Y/\mathsf{E}\beta$ с в. 1 при $n \to \infty$. Пусть $\sigma^2 := \mathsf{D}[Y - r\beta] \in (0, \infty)$. Тогда имеет место следующая центральная предельная теорема

$$\frac{\sqrt{n}[r_n - r]}{\sigma/\mathsf{E}\beta} \Rightarrow \mathbb{N}(0,1)\ \text{ при } n \to \infty, \tag{3}$$

где $\mathbb{N}(0,1)$ – нормально распределенная с. в. с параметрами 0, 1. На основе (3) строится такой $100(1-\gamma)\%$ доверительный интервал для r:

$$\Big[r_n - \frac{z_\gamma s(n)}{\hat{\beta}_n\sqrt{n}}, r_n + \frac{z_\gamma s(n)}{\hat{\beta}_n\sqrt{n}}\Big], \tag{4}$$

где $s(n)$ и $\hat{\beta}_n$ стандартные выборочные оценки σ^2 и $\mathsf{E}\beta$ соответственно, а $z_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$, где Φ – функция Лапласа.

Для регенерирующего процесса $X(t)$ в непрерывном времени оценки r вычисляются, как правило, *для случайного числа циклов* $N(t)$, завершенных до фиксированного момента $t > 0$. Пусть $\mathsf{E}T < \infty$, $Y := \int_0^T f[X(s)]ds$ и

$\mathsf{E}Y < \infty$. Если $\mathsf{D}T < \infty$, $\mathsf{D}Y < \infty$ и $\sigma^2 := \mathsf{D}[Y - rT] > 0$, то имеет место такая центральная предельная теорема

$$\frac{t^{1/2}[r(t) - r]}{\sigma/\sqrt{\mathsf{E}T}} \Rightarrow \mathbb{N}(0,1) \text{ при } t \to \infty, \tag{5}$$

на основе которой строится доверительный интервал для r, аналогичный (4).

Во второй главе также обсуждаются оценки математического ожидания среднего по времени $\mathsf{E}[r(t)]$ на конечном интервале $[0,\, t]$. Помимо стандартной оценки, рассматривается оценка *по остаточной длине цикла* регенерации, предложенная в работе В. Витта[3]. Эта оценка основывается на наблюдениях за процессом $\{X(t)\}$ с момента t до завершения текущего ц. р. при условии, что константа r *известна.* Дисперсия этой оценки убывает со скоростью $1/t^2$ при $t \to \infty$, тогда как для классической оценки – со скоростью $1/t$. Оценивание среднего на конечном интервале иллюстрируется в четвертой главе на примере вероятности занятости в системе с повторными вызовами.

В третьей главе рассмотрена регенеративная структура систем обслуживания с потерями $GI/G/m/n$ и представлены некоторые результаты, касающиеся регенеративного оценивания стационарной вероятности потери P_{loss}. Также приведен ряд известных результатов, используемых в дальнейшем.

Приход заявки в пустую систему порождает регенерацию. В некоторых специальных случаях существуют альтернативные моменты регенерации. Например, в системе $GI/M/m/n$ для фиксированного $k \in [0,\, m+n]$ можно рекурсивно определить моменты k *– регенерации в дискретном времени* как номера тех заявок, которые находят в системе k других заявок, т. е.,

$$\beta_{i+1}^{(k)} = \inf_l \{l > \beta_i^{(k)} : \nu_l = k\}, \;\; i \ge 0 \; (\beta_0^{(k)} := 0). \tag{6}$$

Пусть $R(t)$ – число потерянных заявок, а $A(t)$ – число приходов в систему в интервале $[0,\, t]$. Поскольку поведение системы на цикле k-регенерации

[3] Kang W., Shahabuddin P., Whitt W. Exploting Regenerative Structure to estimate finite time averages via simulation // ACM. 2006. Vol. v. Pp. 1–38.

(k-цикле) зависит от k, будем обозначать через A_k, R_k типичное число приходов и число потерь на k-цикле соответственно. Пусть $I_j = 1$, если теряется заявка j. Процесс $\{I_j\}_{j\geq 0}$ положительно-возвратный регенерирующий в моменты (6), и при условиях $\mathsf{P}(\tau > S) > 0$ и $\mathsf{E}S^2 < \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{A(t)} = \lim_{j\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{j} I_i}{j} = \frac{\mathsf{E}R_k}{\mathsf{E}A_k} := \mathsf{P}_{loss}, \tag{7}$$

$$\frac{R(t) - \mathsf{P}_{loss}A(t)}{\sqrt{A(t)}} \Rightarrow \mathbf{N}\Big(0, \frac{\mathsf{D}Z_k}{\mathsf{E}A_k}\Big), \;\; t \to \infty, \tag{8}$$

где $Z_k := R_k - \mathsf{P}_{loss}A_k$. Доверительные интервалы для P_{loss}, построенные по различным последовательностям k-регенераций на основе (8), асимптотически эквивалентны. Однако моделирование на ограниченном интервале времени может дать преимущество одной последовательности перед другими.

Также в третей главе для широкого класса регенеративных систем с потерями доказано соотношение, связывающее вероятность P_{loss} со стационарной вероятностью простоя канала P_0. Рассмотрим систему $GI/G/m/n$ с коэффициентом загрузки $\rho = \lambda/\mu$, где λ и μ – интенсивности входного потока и обслуживания соответственно.

Теорема 1. *В системе $GI/G/m/n$ при условии $\mathsf{P}(\tau > S) > 0$ стационарная вероятность потери P_{loss} связана со стационарной вероятностью простоя (любого) канала P_0 следующим образом:*

$$\mathsf{P}_{loss} = 1 - \frac{m}{\rho}(1 - \mathsf{P}_0). \tag{9}$$

В четвертой главе представлен регенеративный анализ систем с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты. Рассмотрим систему вида $GI/G/m/n$ (обозначаемую через Σ). Входной поток восстановления имеет интенсивность λ, а произвольное (типичное) время обслуживания S имеет среднее $\mathsf{E}S := 1/\mu$. Заявки, поступающие в систему, когда все сервера заняты и буфер полон, уходят на орбиту бесконечного объема, а затем вновь пытаются (по одной) попасть на обслуживающее устройство через экспоненциально распределенное время с параметром μ_0, и в случае неудачи (мгновенно) возвращаются на орбиту. Система Σ радикально отличается от классических систем с повторными вызовами, где интенсивность орбитальных заявок растет с ростом их числа, поскольку заявки делают повторные попытки независимо.

Единственным источником нестационарности системы Σ может быть неограниченный рост числа заявок на орбите. В работе К. Авраченкова и Е. В. Морозова[4] доказано, что условие

$$(\lambda + \mu_0)\mathsf{P}_{loss} < \mu_0 \tag{10}$$

является достаточным условием стационарности орбиты в системе Σ. Здесь P_{loss} есть стационарная вероятность потери в мажорирующей системе с потерями $\hat{\Sigma}$, отличающейся от исходной системы Σ наличием дополнительного пуассоновского входного потока с интенсивностью μ_0. Условие (10) является *критерием стационарности* для систем с пуассоновским потоком исходных заявок (λ-потоком). В этом случае, при условии

$$(\lambda + \mu_0)\mathsf{P}_{loss} > \mu_0, \tag{11}$$

число заявок на орбите неограниченно растет, т. е. система нестационарна.

Теорема 2. *Если для системы Σ вида $M/G/m/0$ выполнено условие* (10), *то*

$$\rho = m\mathsf{P}_b, \tag{12}$$

где $\mathsf{P}_b = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(\nu(t) = 1)$ – предельная вероятность занятости любого сервера, а $\rho = \lambda/\mu$.

[4] Avrachenkov K., Morozov E. V. Stability analysis of GI/G/c/K Retrial Queue with Constant Retrial Rate // INRIA(Sophia Antipolis), Research Report. 2010. Vol. 7335.

Теорема 3. *Система Σ вида $M/G/2/0$ (с интенсивностью исходных заявок $\lambda = 1$) стационарна, если $\mu > 1/2$ и*

$$\mu_0 > \frac{\mu\sqrt{\mu^2 + 2\mu - 1} - \mu^2 - \mu + 1}{2\mu - 1}. \tag{13}$$

Теорема 4. *Необходимое и достаточное условие стационарности системы Σ вида $M/G/1/0$ имеет вид*

$$\rho + \rho\frac{\lambda}{\mu_0} < 1, \tag{14}$$

где $\rho\frac{\lambda}{\mu_0}$ – предельная вероятность простоя сервера при непустой орбите.

Т. к. $\rho\frac{\lambda}{\mu_0} > 0$, то дисциплина обслуживания в системе с повторными вызовами является *неконсервативной*, поскольку возможны простои сервера при ожидающих на орбите заявках.

Одно из основных преимуществ регенеративного метода состоит в том, что он применим к широкому классу немарковских процессов. Например, состояние системы Σ в момент t может быть описано с помощью скалярного немарковского процесса $\{X(t) := \mathcal{N}(t) + \nu(t),\ t \geq 0\}$, где $\mathcal{N}(t)$ – число заявок на орбите, а $\nu(t)$ – размер очереди. Очевидно, что процесс $\{X(t)\}$ регенерирует, когда исходная заявка (λ-заявка) поступает в пустую систему.

Положим, $I_j = 1$, если j-я попытка обращения к серверу неудачна (т. е. происходит уход на орбиту). Если процесс X – положительно возвратный, то при условии $\mathsf{P}(\tau > S) > 0$ выполнено $\mathsf{P}(I_j = 1) \to \mathsf{P}(I = 1) := \mathsf{P}_{orb}$ с вероятностью 1 (с в. 1) при $j \to \infty$ и P_{orb} есть предельная вероятность блокировки.

Если X *не является положительно возвратным* (т. е. $\mathsf{E}T = \infty$), то для определения вероятности P_{orb} и ее оценивания можно использовать *квазирегенерации*, которые определяются как моменты, когда λ-заявка встречает пустой сервер (в то время, как орбита, вообще говоря, *может быть не пустой*).

Пусть $D(t)$ и $\Lambda_0(t)$– число уходов из системы после окончания обслуживания и число попыток с орбиты попасть на сервер в интервале $[0,\ t]$ соответственно. Обозначим

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t} := \lambda_e,\ \ \lim_{t\to\infty}\frac{\Lambda_0(t)}{t} := \tilde{\mu}_0, \tag{15}$$

(если такие пределы с в. 1 существуют) и пусть $\tilde{\rho} := (\lambda+\mu_0)\mathsf{E}S$. Имеет место следующая теорема, доказательство которой опирается на обобщенную формулу Литтла.

Теорема 5. *В системе с повторными вызовами вида $M/G/1/0$*
а) в стационарном режиме, т. е. при выполнении условия (10), *пределы (15) существуют и*

$$\lambda_e = \lambda,\ \ \mathsf{P}_{orb} = \frac{\tilde{\mu}_0}{\lambda+\tilde{\mu}_0}, \tag{16}$$

причем для системы вида $M/M/1/0$: $\tilde{\mu_0} = \rho^2(\mu+\lambda+\mu_0)$;
б) в нестационарном режиме, т. е. при выполнении условия (11), *пределы (15) существуют, $\tilde{\mu}_0 = \mu_0$ и*

$$\lambda_e = (\lambda+\mu_0)(1-\mathsf{P}_{orb}),\quad \mathsf{P}_{orb} = \mathsf{P}_b = \frac{\tilde{\rho}}{1+\tilde{\rho}}, \tag{17}$$

где P_b – стационарная вероятность занятости сервера в $\hat{\Sigma}$.

В работе рассматриваются две оценки вероятности занятости на конечном интервале $[0,\ t]$ (стандартная и альтернативная). Альтернативная оценка (по остаточной длине ц. р.) на $[0,\ t]$ имеет меньшую дисперсию, однако ее построение возможно только при известном значении P_b. В работе показано, что в системе вида $M/G/1/0$ в стационарном режиме $\mathsf{P}_b = \lambda/\mu$, а в нестационарном режиме $\mathsf{P}_b = \frac{\lambda+\mu_0}{\lambda+\mu_0+\mu}$, что дает возможность использования альтернативной оценки.

Рассмотрим следующую m-серверную систему с повторными вызовами с N классами заявок. Заявки i-го класса, поступая в систему, образуют входной поток восстановления с параметром λ_i и обслуживаются в течение н. о. р. промежутков времени $\{S_k^{(i)}\}$, причем $\mathsf{E}S^{(i)} := 1/\mu_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. Предполагается, что серверы идентичны. Заявки, поступающие в систему, когда все сервера заняты и буфер размера $n < \infty$ полон, поступают на орбиту i-го типа, а затем вновь пытаются попасть на обслуживание, образуя экспоненциальный поток повторных заявок с интенсивностью $\mu_0^{(i)}$.

Теорема 6. *Если m-серверная система с повторными вызовами и N классами заявок стационарна, то*

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i = m\mathsf{P}_b, \tag{18}$$

где $\rho_i := \lambda_i \mathsf{E}S^{(i)}$, а P_b – предельная вероятность занятости каждого сервера.

Теорема 7. *Необходимое условие стационарности односерверной системы с пуассоновским входным потоком и N классами заявок (N орбитами) имеет следующий вид:*

$$\lambda_i \mathsf{P}_b < (1 - \mathsf{P}_b)\mu_0^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{19}$$

В пятой главе представлены результаты имитационного моделирования систем с конечным буфером. Для моделирования было разработано программное обеспечение, зарегистрированное в объединенном фонде электронных ресурсов “Наука и образование” (ОФЭРНиО) № 18480 от 06.08.2012. В рамках моделирования систем с потерями представлены результаты регенеративного оценивания P_{loss} в системе $GI/G/m/n$ (для экспоненциального распределения и распределения Парето интервалов между поступлениями заявок и времен обслуживания). Исследована эффективность k-регенераций в системах $M/M/m/n$ и $Pareto/M/m/n$ с точки зрения величины дисперсии оценки P_{loss}. В рамках моделирования систем с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты, представлены результаты регенеративного и квази-регенеративного оценивания P_{orb} (для систем вида $M/M/1/0$ и $M/Pareto/1/0$). Также приведены результаты оценивания вероятности занятости на конечном интервале и показано, что альтернативная оценка по остаточной длине ц. р. эффективнее стандартной с точки зрения величины дисперсии. Результаты моделирования системы с повторными вызовами вида $M/M/1/0$ с двумя классами заявок позволяют сделать вывод, что необходимые условия стационарности (19) являются критерием стационарности системы.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе, подведены итоги исследования и предложены перспективы дальнейшей разработки темы.

Заключение

В работе подробно описан регенеративный метод доверительного оценивания, а также его применение для оценивания характеристик систем с конечным буфером. Доказано соотношение, связывающее стационарную вероятность потери со стационарной вероятностью простоя обслуживающего канала для широкого класса немарковских систем, где потери могут быть вызваны различными причинами.

Большое внимание уделено системам с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты. Для таких систем исследована эффективность классической и альтернативной оценок вероятности блокировки, проведено регенеративное оценивание вероятности занятости сервера на конечном интервале. Получены необходимые условия стационарности нового класса систем с повторными вызовами и несколькими типами заявок (несколькими орбитами). Результаты имитационного моделирование систем с потерями и систем с повторными вызовами хорошо согласуются с проведенным теоретическим анализом.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при анализе характеристик и оценки качества сервиса широкого класса коммуникационных систем, в том числе мобильных сетей связи, а также сетевых протоколов.

В перспективе планируется продолжать исследование области стационарности систем с повторными вызовами и несколькими орбитами. Также предполагается развитие регенеративного метода моделирования с целью повешения эффективности оценивания стационарных характеристик телекоммуникационных систем.

Список публикаций

1. **Морозов Е. В., Некрасова Р. С. Оценивание вероятности блокировки в системе с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты // Труды карельского научного центра РАН. 2011**. № **5**. С. **63–74**.

2. **Морозов Е. В., Некрасова Р. С. Об оценивании вероятности переполнения конечного буфера в регенеративных системах обслуживания // Информатика и ее применения. 2012**. Т. **6**, № **3**. С. **90–98**.

3. Горичева Р. С., Морозов Е. В. Регенеративное моделирование вероятности потери в системах обслуживания с конечным буфером // Труды карельского научного центра РАН. 2010. № 3. С. 20–29.

4. Goricheva R. S., Morozov E. V. Regenerative simulation of finite buffer queuing systems // Proceedings of AMICT’2009. 2009. Vol. 11. Pp. 88–98.

5. Goricheva R. S., Lukashenko O. V., Morozov E. V., Pagano M. Regenerative analysis of a finite buffer fluid queue // Proceedings of 2010 International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems andWorkshops (ICUMT), Moscow, 18-20 Oct. 2010. Moscow: IEEE. 2010. Pp. 1132–1136.

6. Avrachenkov K., Goricheva R. S., Morozov E. V. Verification of stability region of a retrial queuing system by regenerative method // Proceedings of the Intenational Conference "Modern Probabilistic Methods for Analysis and optimization of Information and Telecommunication Networks". 2011. Pp. 22–28.

7. Goricheva R. S. Regenerative approach for retrial queuing system // Third Northern Triangular seminar. Programme and abstracts. 2011. Pp. 9–10.

8. Morozov E. V., Nekrasova R. S. On the estimation of the overflow probability in finite buffer systems // XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and V International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems", Book of Abstracts. Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS. 2011. Pp. 81–82.

9. Avrachenkov K., Morozov E., Nekrasova R., Steyaert B. On stability of a two-class retrial system with constant retrial rate // Proceedings of "9th International workshop on retrial queues" 2012. 2012. Pp. 15–16.

10. Некрасова Р. С. Программа «Регенеративное моделирование систем с конечным буфером» [Электронный ресурс] // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование». 2012. № 8. Режим доступа: http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2012/8.doc, свободный.