На правах рукописи

Реттиева Анна Николаевна

МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ: ПОДХОД С ВВЕДЕНИЕМ ЗАПОВЕДНОЙ ЗОНЫ

01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск 2004

Работа выполнена в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Мазалов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор А. И. Абакумов
доктор физико-математических наук, профессор Ю.В. Заика

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 10 декабря 2004 г. в 14 часов 15 мин. на заседании диссертационного совета К 002.142.01 в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН по адресу: 185610, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Карельского научного центра РАН.

Автореферат разослан "5" ноября 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
К 002.142.01
к.ф.-м.н., доцент В. Т. Вдовицын

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена одному из актуальных разделов теории динамических игр, связанному с задачами управления биоресурсами. В работе исследуются теоретико-игровые модели рационального природопользования, связанные с эксплуатацией промысловых рыбных популяций. Для эффективного решения таких задач необходимо количественное обоснование соотношений между величинами рыбных ресурсов и интенсивностью промысла, а также точное определение возможного предела увеличения вылова.

Традиционная схема исследования задач такого класса - определение квот на вылов рыбы для участников этого процесса. Существует достаточно много исследований в этом направлении. В данной работе рассмотрены модели динамической игры управления биоресурсами, участниками которой являются центр (государство), которое назначает долю запретной для вылова (заповедной) части водоема, и игроки (рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов. Задачей центра является выбор оптимальной доли заповедной территории для поддержания стабильного развития популяции в водоеме в долгосрочной перспективе и определение возможного вылова, достаточного для удовлетворения спроса. Сама постановка задачи является оригинальной. Кроме того, важен и прикладной аспект, поскольку практически организация такой природоохранной схемы значительно проще, чем регулирование вылова через квоты.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является построение теоретико-игровых моделей управления биоресурсами и их исследование с помощью методов динамических игр. Причем, основной акцент делается на обоснование введения заповедной зоны, размер которой является стратегией центра. Предполагается построение оптимальных управлений игроков с использованием различных критериев оптимальности.

Объекты исследования. Объектами исследования в диссертации являются теоретико-игровые модели управления биоресурсами, стратегии игроков, эксплуатирующих природный ресурс и функции выигрышей этих игроков.

Методы исследования. Основными методами исследования в диссертации являются принцип максимума Понтрягина и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Основными принципами оптимальности являются оптимальность по Нэшу и Штакельбергу, также применяются такие критерии оптимальности, как оптимальность по Калаи-Смородинскому, монотонное по области решение и решение с равными потерями.

Научная новизна. В диссертации впервые на основе методов динамических игр разработаны модели управления биоресурсами с введением охраняемой территории. Построены оптимальные по Нэшу и Штакельбергу управления в задаче управления популяцией, распределенной по территории. Построены оптимальные управления в моделях, учитывающих неоднородность структуры популяции и ее распределение в водоеме. Предложен подход устранения отрицательных значений управлений в задачах управления биоресурсами.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. На основе методов динамических игр разработаны модели управления биоресурсами с введением охраняемой территории.

2. Построены оптимальные по Нэшу и Штакельбергу управления в задаче управления популяцией, распределенной по территории.

3. Построены оптимальные управления в моделях, учитывающих неоднородность структуры популяции и миграцию.

4. Проведено сравнение решений в задачах управления биоресурсами путем введения заповедной зоны с использованием различных критериев оптимальности.

5. Проведены модельные расчеты нахождения оптимальных природоохранных мер на примере озер Карелии, которые показали возможность применения данного подхода как для стабильно развивающихся, так и для регрессирующих популяций.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты докладывались на I и II Всероссийских научных школах по математической экологии (Петрозаводск, 2001, 2003), Tenth International Symposium on Dynamic Games and Applications (St.Petersburg, 2002), International Workshop "Networking games and resource allocation" (Petrozavodsk, 2002), IV и V Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2003, 2004).

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 01-01-00126).

Публикация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в десяти работах, из них статья в журнале "Обозрение прикладной и промышленной математики", две статьи в сборнике "Game Theory and Applications", статья в сборнике трудов Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, статьи в трудах Tenth International Symposium on Dynamic Games and Applications и International Congress of Mathematicians-2002 (Satellite Conference on Game Theory and Applications), тезисы четырех докладов на международных, всероссийских и региональных конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы, содержащего 65 наименований. Общий объем диссертации составляет 147 страниц, включая 42 таблицы и 128 графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий исторический обзор исследований, посвященных управлению биологическими популяциями, обоснование актуальности темы диссертации, формулировка цели работы и описание структуры диссертации.

Первая глава посвящена применению основных методов исследования игровых задач управления биоресурсами, а именно принципа максимума Понтрягина и уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, к модели развития биологической популяции, подверженной эксплуатации двумя игроками. Основными используемыми принципами оптимальности являются оптимальность по Нэшу и Штакельбергу.

В разделе 1.1. исследуется модель с конечным временем, в которой с помощью принципа максимума Понтрягина найдены оптимальные решения. Уравнение развития популяции имеет вид

$$x'(t) = \varepsilon x(t) - u(t) - v(t)\,,\ x(0) = x_0\,, \tag{1.1}$$

где ε - коэффициент естественного роста популяции, $u(t)$, $v(t)$ - управления первого и второго игрока соответственно.

Функционалы выигрышей игроков имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^T [(x(t) - \bar{x})^2 + c_1 u^2(t)]\,dt\,, \\ J_2 &= \int_0^T [(x(t) - \bar{x})^2 + c_2 v^2(t)]\,dt\,, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\bar{x}$ - размер популяции, оптимальный для воспроизводства, c_1, c_2– затраты на вылов.

Задача (1.1)—(1.2) исследована с применением различных принципов оптимальности.

В случае равновесия по Нэшу оптимальные управления имеют вид:

$$u(t) = \frac{\lambda_1(t)}{2c_1}\,,\ v(t) = \frac{\lambda_2(t)}{2c_2}\,,$$

и определяются из системы

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\bar{x}(c_1+c_2)}{\varepsilon^2 c_1 c_2 + c_1 + c_2} - l_1(t)(\varepsilon + \sqrt{D})e^{\sqrt{D}t} + l_2(\sqrt{D} - \varepsilon)e^{-\sqrt{D}t} \\ \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \frac{2\bar{x}c_1c_2}{\varepsilon^2 c_1 c_2 + c_1 + c_2} + 2l_1 e^{\sqrt{D}t} + 2l_2 e^{-\sqrt{D}t}\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

где D, l_1, l_2 определены в диссертации.

Для случая $c_1 = c_2 = c$ применена следующая схема устранения отрицательных значений управлений. Выделяется точка t_0, до которой управления равны нулю, а дальше положительны. Тогда на промежутке $[t_0, T]$ мы получим систему с такими начальными данными:

$$\begin{cases} x'(t) = \varepsilon x(t) - \frac{\lambda(t)(c_1+c_2)}{2c_1c_2}\,,\ x(t_0) = x_0 e^{\varepsilon t_0} \\ \lambda'(t) = -2(x(t) - \bar{x}) - \varepsilon\lambda(t)\,,\ \lambda(T) = 0\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Момент времени t_0 находим как решение оптимизационной задачи

$$\int_0^T (x(t,t_0)-\bar{x})^2 + c_1 u^2(t,t_0)dt \to \min\ . \tag{1.5}$$

Полное решение задачи содержится в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть* $c_1 = c_2 = c$. $c > \frac{2(\bar{x}-x_0)^2}{\varepsilon^2 x_0(2\bar{x}-x_0)}$ *и достаточно больших T оптимальные по Нэшу управления обоих игроков положительны и определяются из (1.3). Иначе оптимальные управления находятся из системы (1.4), при этом момент времени* t_0 *находится как решение оптимизационной задачи (1.5).*

Для нахождения оптимальных по Штакельбергу управлений использован принцип максимума Понтрягина, модифицированный для двухшаговых игр. Оптимальные управления имеют вид:

$$u(t) = \frac{\lambda_1(t)}{2c_1},\ v(t) = \frac{\lambda_2(t)}{2c_2},$$

и определяются из системы

$$\begin{cases} x'(t) = \varepsilon x(t) - \frac{\lambda_1(t)}{2c_1} - \frac{\lambda_2(t)}{2c_2},\ x(0) = x_0 \\ \lambda_1'(t) = -2(x(t)-\bar{x}) - \varepsilon\lambda_1(t) + 2\mu(t),\ \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2'(t) = -2(x(t)-\bar{x}) - \varepsilon\lambda_2(t),\ \lambda_2(T) = 0 \\ \mu'(t) = \frac{\lambda_1(t)}{2c_2} + \varepsilon\mu(t),\ \mu(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

При $c_1 = c_2 = c$ применена следующая схема устранения отрицательных значений управлений. Выделим две точки: на $[0, t_1]$ оба игрока не ведут вылов, на $[t_1, t_0]$ управляет игрок I, а после t_0 – II.

Показано, что точки t_1 и t_0 совпадают. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: игрок I не ведет вылов на всем промежутке времени, а только определяет оптимальную для себя точку t_0. Игрок II ведет вылов на промежутке $[t_0, T]$.

В разделе 1.2. для построения аналитического вида оптимальных управлений в модели с бесконечным временем применено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Рассмотрена та же модель управления популяцией двумя игроками (1.1), но с другими функционалами выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty e^{-rt}[(x(t)-\bar{x})^2 + c_1 u^2(t)]\,dt\,, \\ J_2 &= \int_0^\infty e^{-rt}[(x(t)-\bar{x})^2 + c_2 v^2(t)]\,dt\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Применяя уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (HJB), получен вид оптимальных по Нэшу управлений:

$$u(x) = \alpha_1 x + \frac{\bar{x}/c_1 + \alpha_1 v}{\varepsilon - r - \alpha_1}\,,\ \ v(x) = \alpha_2 x + \frac{\bar{x}/c_2 + \alpha_2 u}{\varepsilon - r - \alpha_2}\,, \tag{1.8}$$

где $\alpha_i = \frac{(2\varepsilon - r)}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{(2\varepsilon - r)^2 c_i}}\right)$, $i = 1, 2$.

Доказана теорема, в которой учитывается возможность появления отрицательных значений управлений.

Теорема 1.3. *Пусть $c_1 = c_2 = c$. При $c > \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\varepsilon x_0(\varepsilon x_0 + (\bar{x} - x_0)(2\varepsilon - r))}$ оптимальные по Нэшу управления обоих игроков положительны и определяются из (1.8). Иначе, оптимальные управления находятся из (1.9), при этом момент времени $t_0 = \frac{1}{\varepsilon}\ln(\frac{p}{x_0})$, где p определяется из (1.10).*

$$u(x) = \alpha_1 x(t, t_0) + \beta_1\,,\ \ v(x) = \alpha_2 x(t, t_0) + \beta_2\,. \tag{1.9}$$

$$p = \frac{4\bar{x}(2\varepsilon - r - 4a_1) - 2a_1 c b_1 r - 8b_1 - c b_1(\varepsilon - r)(2\varepsilon - r)}{-2a_1^2 c(2\varepsilon - r) + a_1 c(\varepsilon - r)(2\varepsilon - r) - 8a_1 + 4(\varepsilon - r)}\,. \tag{1.10}$$

В случае равновесия по Штакельбергу управления имеют вид:

$$u(x) = \alpha_1 x + \beta_1\,,\ \ v(x) = \frac{\alpha_2 x(\varepsilon - r - \alpha_2 + \alpha_1) + \bar{x}/c_2 + \alpha_2\beta_1}{(\varepsilon - r - \alpha_2)}\,, \tag{1.11}$$

где α_1, β_1, α_2 определены в диссертации.

Аналогично случаю с конечным временем показано, что точки t_1 и t_0 совпадают. Тогда управление игрока I равно нулю на всем промежутке времени, а оптимальное поведение игрока II на промежутке $[t_0, \infty]$ имеет вид

$$v(x) = \alpha_2 x + \frac{\bar{x}/c_2}{\varepsilon - r - \alpha_2}\,. \tag{1.12}$$

Во второй главе исследованы теоретико-игровые модели управления биологической популяцией с'введением заповедной зоны. Исследуются модели динамической игры управления биоресурсами, участниками которой являются центр (государство), которое назначает долю запретной для вылова (заповедной) части водоема, и игроки (рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов.

В разделе 2.1 исследованы модели с линейной функцией выигрыша. Для дискретной модели вида

$$x_{t+1} = f(x_t - (1 - s_t)x_t),\ 0 \le t \le T,\ x_0 = x^0\,, \tag{2.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в период t, f – функция развития популяции, s_t, $0 \leq s_t \leq 1$ – доля заповедной части водоема, оптимальное решение задачи

$$\begin{cases} \max(J(s_t) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t p((1 - s_t)x_t))\,, \\ \text{где } x_t \text{ определяется из (2.1)} \end{cases} \tag{2.2}$$

найдено в теореме 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $p((1 - s_t)x_t) = (1 - s_t)x_t$. Тогда оптимальное управление имеет вид $s(x) = \min(1, x^*/x)$, а функция Беллмана определяется соотношениями*

$$\begin{cases} B(x) = x - x^* + B(x^*)\,,\ x \geq x^* \\ B(x) = \beta B(f(x))\,,\ x \leq x^*\,, \end{cases}$$

где $B(x^*) = \frac{\beta}{1-\beta}[f(x^*) - x^*]$.

Для непрерывного аналога этой модели доказана теорема 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть $p((1 - s(t))x(t)) = (1 - s(t))x(t)$. Тогда оптимальное управление имеет вид $s(x) = \min(1, x^*/x)$, а функция Беллмана определяется соотношениями*

$$\begin{cases} B(x) = \frac{\rho x}{1+\rho} - x^* + B(x^*)\,,\ x \geq x^* \\ B(x) = \frac{1}{\rho} B'_x(x) f(x)\,,\ x \leq x^*\,, \end{cases}$$

где $B(x^*) = \frac{1}{1+\rho} f(x^*)$.

В разделе 2.2 исследованы теоретико-игровые модели в случае равномерного распределения. При участии одной артели динамика развития рыбной популяции с учетом вылова описывается уравнением

$$x'(t) = F(x(t)) - qE(t)(1 - s(t))x(t), \; 0 \leq t \leq T, \; x(0) = x_0, \qquad (2.3)$$

где $x(t) \geq 0$ - размер популяции в период t, F - функция развития популяции, $E(t) \geq 0$ - рыболовецкие усилия артели, измеряемые в количестве кораблей, участвующих в ловле в период t, $s(t)$ - доля запретной для вылова (заповедной) части водоема и $q > 0$ - коэффициент возможного вылова на единицу рыболовецких усилий артели.

Популяция развивается в соответствии с моделью Ферхюльста

$$F(x) = rx(1 - x/K),$$

где r - коэффициент внутреннего роста, а K - максимальная емкость природного объекта.

Выигрыш игрока определяется следующим образом:

$$J = g(x(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) \cdot qE(t)(1 - s(t))x(t) - c^0 E(t)]dt,$$

где p - коэффициент дисконтирования, c^0 - затраты на вылов для одного судна и Π - функция цены, определенная как

$$\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) = p - kqE(t)(1 - s(t))x(t), \; p, k > 0$$

или

$$J = g(x(T)) + \int_0^T [-\frac{1}{2}aE^2(t)(1 - s(t))^2 x^2(t) + bE(t)(1 - s(t))x(t) - cE(t)]dt,$$

где $a = 2kq^2 \exp(-\rho t)$, $b = pq \exp(-\rho t)$, $c = c^0 \exp(-\rho t)$.

Функция $\partial/x)$ описывает будущий доход от эксплуатации запасов в конечный момент времени T и $g'(x) \geq 0$, $g''(x) \leq 0$.

Оптимальное решение задачи

$$\begin{cases} \max(J(E(t))), \\ \text{где } x(t) \text{ определяется из (2.3)} \end{cases} \tag{2.4}$$

найдено в следующей теореме.

Теорема 2.3. *$E^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda(t)$ такие, что*

$$E^*(t) = \frac{(b - q\lambda(t))(1 - s(t))x^*(t) - c}{a(1 - s(t))^2 x^*(t)^2}, \ 0 \le t \le T,$$

$$x^{*\prime}(t) = F(x^*(t)) - qE^*(t)(1 - s(t))x^*(t), \ 0 \le t \le T, \ x^*(0) = x_0,$$

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= -E^*(t)(1 - s(t))(b - aE^*(t)(1 - s(t))x^*(t)) - \\ &- \lambda(t)(F'(x^*(t)) - qE^*(t)(1 - s(t))), \ \lambda(T) = g'_x(x^*(T)), \end{aligned}$$

и выполнены следующие условия:

$$x^*(t) > x_m = \frac{2c^0}{pq(1 - s(t))}, \quad b - \lambda(t)q \ge \frac{3c}{2x_m(1 - s(t))},$$

дают решение задачи (2.4).

В качестве функционалов, определяющих выигрыш центра, рассмотрены следующие:

1. $I_1 = -\int\limits_0^T (x(t) - \bar{x}(t))^2 dt$,

   где $\bar{x}(t)$ – размер популяции, оптимальный для воспроизводства.

2. $I_2 = -\int\limits_0^T (U(t) - \hat{x}(t))^2 dt$,

3. $I_3 = -\int\limits_0^T |U(t) - \hat{x}(t)| \cdot \alpha \cdot \Pi(q, s(t), x(t), E(t)) dt$,

   где $U(t) = qE(t)(1 - s(t))x(t)$ – вылов игрока в момент времени t, $\hat{x}(t)$ – уровень потребления, определяемый спросом, $\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) = p - kqE(t)(1 - s(t))x(t)$, $p, k > 0$.

Проведено численное моделирование и получены значения выигрышей J, I_1, I_2 и I_3 Среди точек, определяемых данными выигрышами и составляющих оптимальное по Парето множество, найдены оптимальные по Нэшу и Калаи–Смородинскому решения

В разделе 2.2.2. исследованы модели для двух участников, рассмотрен случай кооперации и конфликта Динамика развития рыбной популяции описывается уравнением

$$x'(t) = F(x(t)) - (q_1E_1(t) + q_2E_2(t))(1 - s(t))x(t)\,,\ x(0) = x_0\,, \quad (2\ 5)$$

где $x(t) \geq 0$ – размер рыбной популяции в период t, $E_i(t) \geq 0$, $i = 1,2$ – рыболовецкие усилия артелей, $s(t)$ – доля заповедной части водоема и $q_i > 0$, $i = 1,2$ – коэффициенты возможного вылова,
$F(x) = rx(1 - x/K)$ – функция развития популяции

В этом варианте выигрыш игрока i, $i = 1,2$ имеет вид

$$J_i = g_i(x(T)) + \int\limits_0^T e^{-\rho_i t}[\Pi_i(q_i, s, x, E_i)\cdot q_iE_i(t)(1 - s(t))x(t) - c_i^0E_i(t)]dt\,,$$

где $\Pi_i(q_i, s(t), x(t), E_i(t)) = p_i - k_iq_iE_i(t)(1 - s(t))x(t)$, $p_i, k_i > 0$.

Для некоторых $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ оптимальное решение задачи

$$\begin{cases} \max(\mu_1J_1(E_1, E_2) + \mu_2J_2(E_1, E_2))\,, \\ \text{где } x(t) \text{ определяется из (2 5)} \end{cases} \quad (2\ 6)$$

найдено с помощью следующего утверждения.

Теорема 2.4. $E_1^*(t)$, $E_2^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda(t)$ *такие, что*

$$E_i^*(t) = \frac{(b_i - \mu_i^{-1}q_i\lambda(t))(1 - s(t))x^*(t) - c_i}{a_i(1 - s(t))^2x^*(t)^2}\,, 0 \leq t \leq T\,,\ i = 1,2\,,$$

$$x^{*\prime}(t) = F(x^*(t)) - (q_1E_1^*(t) + q_2E_2^*(t))(1 - s(t))x^*(t)\,, x^*(0) = x_0\,,$$

$$\lambda'(t) = -\sum_{i=1}^{2}\mu_iE_i^*(t)(1 - s(t))(b_i - a_iE_i^*(t)(1 - s(t))x^*(t)) -$$

$$-\lambda(t)(F'(x^*(t)) - \sum_{i=1}^{2}q_iE_i^*(t)(1 - s(t)))\,,\quad \lambda(T) = \sum_{i=1}^{2}\mu_ig'_{ix}(x^*(T))\,,$$

и для $i = 1,2$ выполнены следующие условия:

$$x^*(t) > x_m = \max_i\{\frac{2c_i^0}{p_i q_i(1-s(t))}\}\,,\;\; b_i - \mu_i^{-1}\lambda_i(t)q_i \geq \frac{3c_i}{2x_m(1-s(t))}\,,$$

дают решение задачи (2.6).

В случае конфликта в качестве принципа оптимальности используется равновесие по Нэшу, $(E_1^*(t), E_2^*(t))$:

$$\begin{cases} J_1(E_1^*(t), E_2^*(t)) \geq J_1(E_1(t), E_2^*(t))\,, \\ J_2(E_1^*(t), E_2^*(t)) \geq J_2(E_1^*(t), E_2(t))\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Теорема 2.5. $E_1^*(t)$, $E_2^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *такие, что*

$$E_i^*(t) = \frac{(b_i - q_i\lambda_i(t))(1-s(t))x^*(t) - c_i}{a_i(1-s(t))^2 x^*(t)^2}\,, 0 \leq t \leq T\,,\;\; i = 1,2,$$

$$x^{*\prime}(t) = F(x^*(t)) - (q_1 E_1^*(t) + q_2 E_2^*(t))(1-s(t))x^*(t)\,,\;\; x^*(0) = x_0\,,$$

$$\begin{aligned} \lambda_i'(t) &= -E_i^*(t)(1-s(t))(b_i - a_i E_i^*(t)(1-s(t))x^*(t)) - \\ &- \lambda_i(t)(F'(x^*(t)) - q_1E_1^*(t)(1-s(t)) - q_2E_2^*(t)(1-s(t)))\,, \end{aligned}$$

$$\lambda_i(T) = g_x'(x^*(T))\,,\;\; i = 1,2\,,$$

и для $i = 1,2$ выполнены следующие условия:

$$x^*(t) > x_m = \max_i\{\frac{2c_i^0}{p_i q_i(1-s(t))}\}\,,\;\; b_i - \lambda_i(t)q_i \geq \frac{3c_i}{2x_m(1-s(t))}\,,$$

дают решение задачи (2.7).

В разделе 2.3 исследуются игровые модели с заданной функцией распределения пищи в водоеме при участии одной или двух рыболовецких артелей. Представим водоем как отрезок [0,1]. На нем задана плотность распределения пищи - $g(s)$, $s \in [0,1]$. Согласно закону идеального свободного распределения рыба распределяется пропорционально пище. Обозначим $x(t)$ - объем популяции в период времени t, тогда в данной точке s плотность рыбной популяции будет $x(t)g(s)$.

В данном разделе центр определяет долю заповедной части водоема, обозначаемую отрезком $[a, b]$, и вылов ведет рыболовецкая артель на протяжении T периодов времени. Динамика развития рыбной популяции описывается уравнением

$$x'(t) = F(x(t)) - qE(t)(1 - \int_a^b g(s)ds)x(t),\ 0 \le t \le T,\ x(0) = x_0\,, \quad (2.8)$$

$F(x) = rx(1 - x/K)$ – функция развития популяции.

Выигрыш игрока запишется таким образом:

$$J = h(x(T)) + \\ + \int_0^T e^{-\rho t}[\Pi(q, a, b, x(t), E(t)) \cdot qE(t)(1 - \int_a^b g(s)ds)x(t) - c^0 E(t)]dt\,,$$

где $\Pi(q, a, b, x(t), E(t)) = p - kqE(t)(1 - \int_a^b g(s)ds)x(t),\ p, k > 0$.

Оптимальное решение задачи

$$\begin{cases} \max(J(E(t)))\,, \\ \text{где } x(t) \text{ определяется из (2.8)} \end{cases} \quad (2.9)$$

найдено с помощью следующего утверждения.

Теорема 2.6. *$E^*(t)$, $x^*(t)$, $\lambda(t)$ такие, что*

$$E^*(t) = \frac{(\beta - q\lambda(t))(1 - \int_a^b g(s)ds)x^*(t) - c}{\alpha(1 - \int_a^b g(s)ds)^2 x^*(t)^2}\,, 0 \le t \le T\,,$$

$$x^{*\prime}(t) = F(x^*(t)) - qE^*(t)(1 - \int_a^b g(s)ds)x^*(t)\,,\ 0 \le t \le T\,,\ x^*(0) = x_0\,,$$

$$\lambda'(t) = -E^*(t)(1-\int_a^b g(s)ds)(\beta - \alpha E^*(t)(1-\int_a^b g(s)ds)x^*(t)) -$$
$$- \lambda(t)(F'(x^*(t)) - qE^*(t)(1-\int_a^b g(s)ds)), \ \lambda(T) = h'_x(x^*(T)),$$

и выполнены следующие условия:

$$x^*(t) > x_m = \frac{2c^0}{pq(1-\int_a^b g(s)ds)}, \quad \beta - \lambda(t)q \geq \frac{3c}{2x_m(1-\int_a^b g(s)ds)},$$

дают решение задачи (2.9).

Третья глава посвящена исследованию моделей, учитывающих неоднородность структуры популяции и ее распределение в водоеме. В разделе 3.1. рассмотрены модели развития возрастно-структурированной популяции в водоеме.

Исследована модель, учитывающая существование двух возрастных групп в водоеме, а именно - мальков и взрослых особей. Центр определяет долю заповедной части водоема s, $0 \leq s \leq 1$. Игрок ведет вылов либо только взрослых особей, либо тех и других на протяжении T периодоа времени.

Приведем результаты для случая, когда рыболовецкая артель может ловить и мальков, и взрослых рыб, используя различные виды сетей. Динамика развития возрастных групп описывается системой:

$$\begin{cases} x_1'(t) = k\alpha x_2(t) - \beta x_1(t) - \gamma x_1(t) - q_1(t)E(t)(1-s(t))x_1(t) \\ x_2'(t) = r(x_2(t) + \beta x_1(t))(1 - \frac{x_2(t)+\beta x_1(t)}{K}) - q_2(t)E(t)(1-s(t))x_2(t) \\ 0 \leq t \leq T, \ x_1(0) = x_1^0, \ x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x_2(t) \geq 0$ - количество взрослых особей в период *t*, $x_1(t) \geq 0$ численность мальков в момент времени *t*, $k\alpha(s)$ - коэффициент рождаемости, β - коэффициент перехода мальков во взрослую группу, γ - коэффициент смертности мальков, r - коэффициент внутреннего роста, K - максимальная емкость природного объекта, $q_1(t), q_2(t) > 0$, $q_1(t) + q_2(t) = q$ - коэффициенты возможного вылова мальков и взрослых особей (доли сетей для двух возрастных видов рыб), *q* - максимально возможный коэффициент вылова, *s(t)* - доля запретной для вылова части водоема.

Сделав замену $u_i(t) = q_i(t)E(t)$, выигрыш игрока запишем как:

$$J = g(x_1(T), x_2(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[\Pi_1(u_1(t), s(t), x_1(t))u_1(t)(1-s(t))x_1(t)+$$
$$+\Pi_2(u_2(t), s(t), x_2(t))u_2(t)(1-s(t))x_2(t)) - c^0E(t)(u_1(t)+u_2(t))]dt\,,$$

где $\Pi_i(u_i(t), s(t), x_i(t)) = p_i - ku_i(t)(1-s(t))x_i(t)\,, i = 1,2\,.$

Нас интересует оптимальное решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \max(J(u_1(t), u_2(t)))\,, \\ \text{где } x_1(t), x_2(t) \text{ определены из (3.1)}\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *Для того, чтобы $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ давали решение задачи (3.2), необходимо*

$$u_i^*(t) = \frac{(b_i - \lambda_i(t))(1-s(t))x_i^*(t) - c}{a(1-s(t))^2 x_i^*(t)^2}\,, 0 \le t \le T\,, i = 1,2\,,$$

$$x_1^{*\prime}(t) = k\alpha x_2^*(t) - \beta x_1^*(t) - \gamma x_1^*(t) - u_1^*(t)(1-s(t))x_1^*(t)\,,$$

$$x_2^{*\prime}(t) = r(x_2^*(t) + \beta x_1^*(t))(1 - \frac{x_2^*(t) + \beta x_1^*(t)}{K}) - u_2^*(t)(1-s(t))x_2^*(t)\,,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1'(t) &= -u_1^*(t)(1-s(t))(b_1 - au_1^*(t)(1-s(t))x_1^*(t))+ \\ &+ \lambda_1(t)(\beta+\gamma+u_1^*(t)(1-s(t))) - \lambda_2(t)r\beta(1-\tfrac{2(x_2^*(t)+\beta x_1^*(t))}{K})\,, \\ \lambda_2'(t) &= -u_2^*(t)(1-s(t))(b_2 - au_2^*(t)(1-s(t))x_2^*(t))- \\ &- \lambda_1(t)k\alpha - \lambda_2(t)r(1-\tfrac{2x_2^*(t)}{K} - \tfrac{2\beta x_1^*(t)}{K}) + \lambda_2(t)u_2^*(t)(1-s(t))\,, \end{aligned}$$

$$x_i^*(0) = x_i^0\,,\ \lambda_i(T) = g'_{x_i}(x_1^*(T), x_2^*(T))\,.$$

В следующих двух разделах этой главы исследованы модели, учитывающие существование трех возрастных групп в водоеме, а именно - молоди, рыб среднего и старшего возрастов. Рыболовецкая артель может ловить рыб последних двух групп. Рассмотрены возможности искусственного и естественного воспроизводства. Приведем результаты для последнего случая. Динамика развития возрастно-структурированной популяции описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = k(l_2\sigma_2 x_2(t) + l_3\sigma_3 x_3(t)) - (\alpha_1 + \beta_1)x_1(t) - dx_1^2(t) \\ x_2'(t) = \alpha_1 x_1(t) - (\beta_2 + \alpha_2)x_2(t) - q_2(t)E(t)(1 - s(t))x_2(t) \\ x_3'(t) = \alpha_2 x_2(t) - \beta_3 x_3(t) - q_3(t)E(t)(1 - s(t))x_3(t) \\ 0 \le t \le T,\ x_i(0) = x_i^0,\ i = 1,2,3, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $x_1(t) \ge 0$ - численность молоди в момент времени *t*, $x_2(t) \ge 0$ - количество рыб среднего возраста в период *t*, $x_3(t) \ge 0$ - численность рыб старшего возраста в момент времени t, l_2, l_3 - коэффициенты выхода на нерест, σ_2, σ_3 - средняя плодовитость, k - коэффициент выживаемости икринок, α_1, α_2 - коэффициенты перехода в другую возрастную группу, $\beta_1 + dx_1(t), \beta_2, \beta_3$ - коэффициенты смертности, $q_2(t)$, $q_3(t) > 0$, $q_2(t) + q_3(t) = q$ - коэффициенты возможного вылова рыб среднего и старшего возрастов на единицу рыболовецких усилий артели, *s(t)* - доля запретной для вылова (заповедной) части водоема.

Выигрыш игрока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J &= g(x_1(T), x_2(T), x_3(T)) + \\ &+ \int_0^T [-\tfrac{1}{2}au_2^2(t)(1 - s(t))^2 x_2^2(t) + b_2u_2(t)(1 - s(t))x_2(t) - cu_2(t) - \\ &- \tfrac{1}{2}au_3^2(t)(1 - s(t))^2 x_3^2(t) + b_3u_3(t)(1 - s(t))x_3(t) - cu_3(t)]dt, \end{aligned}$$

где $a = 2k\exp(-\rho t)$, $c = c^0\exp(-\rho t)$, $b_i = p_i'\exp(-\rho t)$, $i = 2,3$.

Найдено решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \max(J(u_2(t), u_3(t))), \\ \text{где } x_1(t), x_2(t), x_3(t) \text{ определены из (3.3)}. \end{cases} \tag{3.4}$$

В разделе 3.2. исследуются игровые модели, учитывающие миграцию, в частности, с квадратичной и линейной функциями выигрыша. Приведем результаты для последнего случая.

Разделим акваторию водоема *S* на две части: S_1 и S_2, где вылов запрещен и разрешен соответственно, *s* - доля закрытой территории ($s = S_1/S$), $0 < s < 1$. Между закрытой и открытой частями водоема существует миграционный обмен рыбы с коэффициентом обмена

$\gamma = d/s$, где d - скорость обмена. На S_2 вылов ведут две рыболовецкие артели на протяжении Г периодов времени. Динамика развития популяции описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)), \; x_1(0) = x_1^0 \\ x_2'(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - u(t) - v(t), \; x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $x_1(t) \geq 0$ - количество рыбы на закрытой территории в период t, $x_2(t) \geq 0$ - численность рыбы в момент времени t на открытой территории, ε - коэффициент естественного роста популяции, γ_i - коэффициенты миграции, $u(t)$, $v(t)$ - управления игроков.

Используем следующие функционалы выигрышей игроков:

$$\begin{gathered} J_1 = \int_0^T e^{-rt}[m_1((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + c_1 u^2(t) - p_1 u(t)]\, dt, \\ J_2 = \int_0^T e^{-rt}[m_2((x_1(t) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{x}_2)^2) + c_2 v^2(t) - p_2 v(t)]\, dt, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\bar{x}_i$, $i = 1, 2$ - размер популяции, оптимальный для воспроизводства, c_1, c_2 - затраты на вылов, p_1, p_2 - цена единицы рыбы.

Система дифференциальных уравнений для нахождения оптимальных по Нэшу управлений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - \frac{\bar{\lambda}_{12}(t)+p_1}{2c_1} - \frac{\bar{\lambda}_{22}(t)+p_2}{2c_2} \\ \bar{\lambda}_{1i}'(t) = -2m_1(x_i(t) - \bar{x}_i) - \bar{\lambda}_{1i}(t)(\varepsilon - \gamma_i - r) - \bar{\lambda}_{1j}(t)\gamma_j \\ \bar{\lambda}_{2i}'(t) = -2m_2(x_i(t) - \bar{x}_i) - \bar{\lambda}_{2i}(t)(\varepsilon - \gamma_i - r) - \bar{\lambda}_{2j}(t)\gamma_j \\ i, j = 1, 2, \; i \neq j, \; x_i(0) = x_i^0, \; \lambda_{1i}(T) = \lambda_{2i}(T) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Теорема 3.6. *Управления*

$$u^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{12}(t) + p_1}{2c_1}, \quad v^*(t) = \frac{\bar{\lambda}_{22}(t) + p_2}{2c_2},$$

где дополнительные переменные определяются из (3.7), являются оптимальным по Нэшу решением задачи (3.5)-(3.6).

Система дифференциальных уравнений для нахождения оптимальных по Штакельбергу управлений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \varepsilon x_1(t) + \gamma_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = \varepsilon x_2(t) + \gamma_2(x_1(t) - x_2(t)) - \frac{\bar\lambda_{12}(t)+p_1}{2c_1} - \frac{\bar\lambda_{22}(t)+p_2}{2c_2} \\ \bar\lambda_{1i}'(t) = -2m_1(x_i(t) - \bar x_i) - \bar\lambda_{1i}(t)(\varepsilon - \gamma_i - r) - \bar\lambda_{1j}(t)\gamma_j + 2m_2\mu_i(t) \\ \bar\lambda_{2i}'(t) = -2m_2(x_i(t) - \bar x_i) - \bar\lambda_{2i}(t)(\varepsilon - \gamma_i - r) - \bar\lambda_{2j}(t)\gamma_j \\ \mu_1'(t) = \mu_1(t)(\varepsilon - \gamma_1) + \mu_2(t)\gamma_1 \\ \mu_2'(t) = \frac{\bar\lambda_{12}(t)}{2c_2} + \mu_2(t)(\varepsilon - \gamma_2) + \mu_1(t)\gamma_2 \\ i,j = 1,2\,,\ i \neq j\,,\ \lambda_{i1}(T) = \lambda_{i2}(T) = 0\,,\ x_i(0) = x_i^0\,,\ \mu_i(0) = 0\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Теорема 3.7. *Управления*

$$u^*(t) = \frac{\bar\lambda_{12}(t) + p_1}{2c_1}\,,\quad v^*(t) = \frac{\bar\lambda_{22}(t) + p_2}{2c_2}\,,$$

где дополнительные переменные определяются из (3.8), являются оптимальным по Штакельбергу решением задачи (3.5)-(3.6).

В случае, когда функционалы выигрышей игроков имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty e^{-rt}[m_1((x_1(t) - \bar x_1)^2 + (x_2(t) - \bar x_2)^2) + c_1u^2(t) - p_1u(t)]\,dt\,, \\ J_2 &= \int_0^\infty e^{-rt}[m_2((x_1(t) - \bar x_1)^2 + (x_2(t) - \bar x_2)^2) + c_2v^2(t) - p_2v(t)]\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

верны следующие утверждения.

Теорема 3.7. *Управления*

$$u^*(x) = \frac{2a_2x_2 + b_2 + kx_1 + p_1}{2c_1}\,,\quad v^*(x) = \frac{2\alpha_2x_2 + \beta_2 + k_2x_1 + p_2}{2c_2}\,,$$

являются оптимальным по Нэшу решением задачи (3.5),(3.9).

Теорема 3.8. *Управления*

$$u^*(x) = \frac{(2a_2x_2 + b_2 + gx_1)(2c_2 + \sigma) + 2p_1c_2}{4c_1c_2}\,,$$

$$\begin{aligned} v^*(x) &= \tfrac{\sigma(2a_2x_2+b_2+gx_1)(2c_2+\sigma)+4c_1c_2(2\alpha_2x_2+\beta_2+k_2x_1)}{8c_1c_2^2} + \\ &+ (\sigma p_1 + 2c_1p_2)/(4c_1c_2)\,, \end{aligned}$$

являются оптимальным по Штакельбергу решением задачи (3.5),(3.9).

Все приведенные коэффициенты определены в диссертации.

В четвертой главе проведено моделирование задачи с различными критериями оптимальности и сравнение результатов. Для случая постоянного *s(t)* проведено сравнений значений размеров заповедной территории, оптимальных по Нэшу, Калаи-Смородинскому, монотонных по области и с равными потерями.

Для непрерывного *s(t)* исследован случай функционала I_2. Динамика развития рыбной популяции описывается уравнением

$$x'(t) = F(x(t)) - qE(t)(1 - s(t))x(t), \ 0 \le t \le T, \ x(0) = x_0 . \qquad (4.1)$$

Выигрыш игрока имеет вид

$$J = g(x(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) \cdot qE(t)(1 - s(t))x(t) - c^0 E(t)]dt ,$$

где $\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) = p - kqE(t)(1 - s(t))x(t), \ p, k > 0$.

Функционал, определяющий выигрыш государства имеет вид

$$I_2 = -\int_0^T (qE(t)(1 - s(t))x(t) - \hat{x}(t))^2 dt ,$$

где $\hat{x}(t)$ – уровень потребления, определяемый спросом.

Доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. *Управления*

$$E^*(t) = \frac{\hat{x}(p - \bar{\lambda}_2(t) - 2k\hat{x})}{c_0} , \ s^*(t) = 1 - \frac{c_0}{x^*(t)q(p - \bar{\lambda}_2(t) - 2k\hat{x})} ,$$

являются оптимальными по Нэшу и Штакельбергу решениями. При этом $x^*(t)$, $\bar{\lambda}_2(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} x^{*\prime}(t) = rx^*(t)(1 - \frac{x^*(t)}{K}) - \hat{x} \\ \bar{\lambda}_2'(t) = -\frac{\hat{x}}{qx^*(t)}(p - 2k\hat{x}) - \bar{\lambda}_2(t)(r - \frac{2rx^*(t)}{K} - \frac{\hat{x}}{x^*(t)} - \rho) \\ x^*(0) = x_0 , \ \bar{\lambda}_2(T) = g_x'(x^*(T))e^{\rho T} . \end{cases}$$

В разделе 4.2. приведены примеры моделирования динамики развития популяций озер Карелии, а именно лосося в Онежском озере и сига в оз. Сямозеро.

На рис. 1, 2 приведены примеры численного моделирования для популяции сига при исследовании моделей, учитывающих возрастную структуру популяции и миграцию.

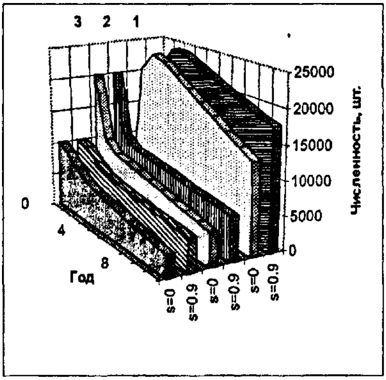

Рис. 1: Возрастно-структурированная популяция (1 - молодь, 2,3 - рыбы среднего и старшего возраста)

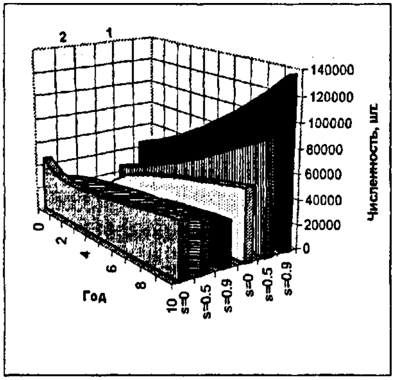

Рис. 2: Популяция с миграцией (1-охраняемая (заповедная) зона, 2 - зона, где вылов разрешен)

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Об одной задаче управления популяцией. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2002, 9, вып.2, с. 293-306.

2. Mazalov V.V., Rettieva A.N. On a reserved territory approach for a resource management problem. // Proceedings of the Tenth International Symposium on Dynamic Games and Applications, 2002, 2, p. 575-578.

3. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Reserved territory approach for a management problem with distributed resource. // Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002 Satellite Conference on GTA, 2002, p. 493-499.

4. Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with age distributed population: reserved territory approach. // Game Theory and Applications, 2003, 9, p. 56-72.

5. Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: reserved territory approach. // Game Theory and Applications, 2004,10, p. 97-108.

6. Реттиева А.Н. Принципы оптимальности в задаче природопользования. // Труды Института прикл. матем. исслед. КарНЦ РАН, 2004, 5, с.63-78.

Тезисы докладов

1. Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задачах природопользования. // Тезисы докладов Всероссийской научной школы по математической экологии, Петрозаводск, 2001, с. 169.

2. Реттиева А.Н. Модель динамической игры управления биоресурсами, учитывающая возрастную структуру популяции. // Обозр. прикл. и пром. мат-ки, 2003,10, в.1, с. 209-210.

3. Реттиева А.Н. Модели динамической игры управления биоресурсами, учитывающие миграцию. // Обозрение прикл. и пром. мат-ки, 2003,10, в.2, с. 420-421.

4. Реттиева А.Н. Сравнение принципов оптимальности в линейной модели динамической игры управления биоресурсами, учитывающей миграцию. // Обозрение прикл. и пром. мат-ки, 2004, 11, в.З, с.580—581.

Изд. лиц. № 00041 от 30.08.99. Подписано в печать 29.10.04. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times». Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 1,5. Усл. печ. л. 1,4. Тираж 100 экз. Изд. № 67. Заказ № 448

Карельский научный центр РАН
185003, Петрозаводск, пр. А. Невского, 50
Редакционно-издательский отдел