

КАРЕЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РАН
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ю. В. ЗАЙКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Курс лекций

ПЕТРОЗАВОДСК
2012

УДК 517.9
ББК 22.161.6
317

Заика Ю. В.

317 Дифференциальные уравнения. Курс лекций.
Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2012. 215 с., ил. 10.
Библиогр. 33 назв.

ISBN 978-5-9274-0524-4

В учебном пособии изложен курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, который автор читает на математическом факультете Петрозаводского государственного университета студентам II курса, обучающимся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика». Изложенный материал соответствует действующим университетским программам. В порядке дополнений представлены элементы математической теории управления.

РЕЦЕНЗЕНТ

доктор физ.-мат. наук А. Н. Кириллов

ISBN 978-5-9274-0524-4

© КарНЦ РАН, 2012
© Ю. В. Заика, 2012

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
I Методы интегрирования ОДУ 1-го порядка	21
1. Основные понятия и определения	21
2. Интегрирование в квадратурах	28
3. Векторные поля на плоскости	46
4. Уравнения $F(x, y, y') = 0$	56
5. Понижение порядка ОДУ	64
II Существование и единственность решений	67
1. Теорема Пикара	68
2. Обобщения и комментарии	72
3. Зависимость решений от параметров	81
4. Теорема Коши о голоморфном решении	88
5. Линейные и управляемые системы	92
III Линейные дифференциальные уравнения	99
1. Линейные однородные уравнения	99
2. Линейные неоднородные уравнения	108
3. Уравнения с постоянными коэффициентами	113
4. Элементы теории колебаний	122
5. δ -функция и её применение	126
6. Операционный метод	135
7. Краевая задача	140
IV Линейные системы ОДУ	145
1. Линейные однородные системы	146
2. Неоднородные линейные системы	154
3. Системы с постоянными коэффициентами	159
4. Системы с периодическими коэффициентами	168

5.	Наблюдаемость линейных систем	172
V	Динамические системы	179
1.	Динамические системы	179
2.	Предельные свойства траекторий	182
3.	Первые интегралы	188
4.	Устойчивость по Ляпунову	195
5.	Оптимальные функции Ляпунова	204
	Литература	213

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит курс лекций, который автор читает на математическом факультете Петрозаводского государственного университета студентам второго курса, обучающимся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика». Изложенный материал соответствует университетским программам. Обучение проводится в сотрудничестве с КарНЦ РАН в рамках Учебно-научного комплекса Института прикладных математических исследований и математического и физико-технического факультетов ПетрГУ.

Стиль изложения материала приближен к лекционному. С одной стороны, это позволило сохранить элементы «живого повествования», но с другой — не достигнут уровень структурирования «определение n – лемма m – теорема N – следствие k ». В рамках краткого курса автор счел такой выбор стиля предпочтительным. В ПетрГУ студенты математического факультета специализируются в основном в области геометрии и топологии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики «в окрестности Computer Science». Представленный курс имеет общеобразовательные цели, «трудные теоремы» лишь сформулированы с соответствующими ссылками на классические книги и учебники, ориентированные на специализацию в области дифференциальных уравнений и математической физики. Параллельно с лекциями ведутся практические занятия, учебное пособие содержит только «наиболее трудный» лекционный материал. Это вместе с нацеленностью на компактность изложения позволило ограничиться сравнительно небольшим объемом издания.

По указанным причинам в учебном пособии нет акцента на приложения в математической физике, как это обычно принято, но «взамен» представлены дополнения из теории управления. Автор стремился выбирать только необходимый материал, ориентируясь на его «работоспособность» в приложениях. В частности, при изложении теории линейных систем с постоянными коэффициентами не используется жорданова форма матрицы.

ВВЕДЕНИЕ

Систематическое развитие теории дифференциальных уравнений начинается (если вообще можно говорить о «началах») с основополагающих работ Ньютона («законы природы выражаются дифференциальными уравнениями»). Ньютона (1642–1727) и Лейбница (1646–1716) по праву считают «отцами» современного математического анализа. Фундаментальные результаты в развитии теории и приложений дифференциальных уравнений принадлежат Бернулли (Якобу, 1654–1705, Иоганну, 1667–1748, Даниилу, 1700–1782), Эйлеру (1707–1783), Даламберу (1717–1783), Лагранжу (1736–1813), Лапласу (1749–1827), Гауссу (1777–1855), Коши (1789–1857), Лиувиллю (1809–1882), Якоби (1804–1851) и другим великим математикам XVII–XIX столетий. Основы качественной теории дифференциальных уравнений заложены на рубеже XX века в работах, прежде всего, Пуанкаре (1854–1912) и Ляпунова (1857–1918). Краткие исторические обзоры содержатся в книгах [2, 18, 27]. Для более детального ознакомления следует обратиться к литературе по истории математики.

Курс лекций посвящен *обыкновенным дифференциальным уравнениям* (ОДУ), моделирующим в основном эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности, конечномерности и дифференцируемости*. Независимая переменная, через которую выражаются изменения параметров процесса, единственна и интерпретируется как время. Механическая терминология в теории ОДУ сложилась исторически и является в определенной степени условной. В частности, рассматриваемые в главе I уравнения имеют скорее геометрическое содержание, когда ищутся кривые с заданными свойствами касательных. *Уравнения в частных производных* (когда независимых переменных несколько), ориентированные на приложения в естествознании, изучаются в курсе *математической физики*. Случай комплекснозначных независимых переменных — предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений*.

Уточним терминологию. Детерминированность означает, что будущее процесса определяется текущим состоянием. В класси-

ческой механике движение однозначно определяется начальными положениями и начальными скоростями точек механической системы. Задачи механики послужили мощным стимулом развития теории ОДУ. Конечномерность: для описания состояния процесса используется конечное число параметров. Множество возможных состояний образует *фазовое пространство*. Дифференцируемость: фазовое пространство является дифференцируемым многообразием и эволюция системы описывается дифференцируемыми функциями. По мере изложения курса эти общие понятия будут наполняться конкретным содержанием.

ОДУ и его решения. Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Здесь x — независимая переменная, а $y = y(x)$ — искомая функция. Порядок старшей производной (n) называется *порядком уравнения*. Прилагательное *обыкновенное*, означающее единственность независимой переменной, в дальнейшем часто будем опускать.

Перейдем к определению *решения* ОДУ. Обычно функция F рассматривается в некоторой *области* $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Элементами (точками и векторами) \mathbb{R}^m считаем упорядоченные наборы m вещественных чисел $x = (x_1, \dots, x_m)$. Подразумеваем стандартную структуру линейного пространства, без необходимости не различаем векторы-столбцы и векторы-строки. Более того, фиксируем скалярное произведение $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$, что превращает \mathbb{R}^m в евклидово пространство E^m с соответствующей нормой и метрикой: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Областью в \mathbb{R}^m называется *открытое связное* множество: каждая точка принадлежит множеству вместе с некоторой окрестностью, и любые две точки можно соединить ломаной (не выходя за пределы множества). Окрестность точки — любое множество, содержащее некоторую ε -окрестность этой точки (открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$). Предполагаем, что $F \in C^1(G)$: частные производные первого порядка существуют и непрерывны в области G .

Замечание 1. В терминах общей топологии использовалась линейная связность в \mathbb{R}^m . Для открытого множества в \mathbb{R}^m связность влечет линейную связность, причем достаточно ограничиться ломаными (с конечным числом звеньев). В дальнейшем

не акцентируем внимание на подобных уточнениях и стараемся выбирать лаконичные формулировки из эквивалентных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = \varphi(x)$, $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, называется решением (ОДУ $F = 0$), если выполняются условия:

- 1) производная $\varphi^{(n)}$ существует на $\langle a, b \rangle$;
- 2) $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in G \forall x \in \langle a, b \rangle$;
- 3) $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, x \in \langle a, b \rangle$.

По определению решение рассматривается на промежутке вещественной оси: $\langle a, b \rangle = (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$. По поводу угловых скобок полагаем, что в контексте трудно спутать промежуток со скалярным произведением. В граничных точках производные понимаются односторонними. Не исключаются и несобственные значения $a = -\infty, b = +\infty$: $(-\infty, +\infty), (-\infty, c), \langle c, +\infty \rangle, c \in \mathbb{R}$. Ограничение связности $\langle a, b \rangle$ отражает, в частности, интуитивное желание рисовать графики решений, не отрывая ручки от листа бумаги. Из механических соображений естественно рассматривать движения на промежутках времени. Итак, формально говоря, решение — это пара $\{\varphi, \langle a, b \rangle\}$, т. е. функция с указанием промежутка, на котором эта функция рассматривается как решение дифференциального уравнения.

В теоретических рассуждениях ограничимся интервалами $I = (a, b)$, что исключает оговорку об односторонних производных. В конкретных задачах при необходимости граничные точки рассматриваются дополнительно. В основном будем изучать уравнения в *нормальной форме* (разрешенные относительно старшей производной): $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Если такое преобразование уравнения $F = 0$ невозможно и (или) нужно учитывать границу ∂G , общая теория усложняется.

Приведем простейшие примеры ОДУ.

1°. Начнем с известного из курса математического анализа уравнения

$$y' = f(x), \quad f \in C(I), \quad I = (a, b).$$

Включение $f \in C(I)$ означает непрерывность функции f на интервале I . Решениями уравнения являются первообразные:

$$y = \varphi(x) = \int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Символ неопределенного интеграла интерпретируется по-разному. В курсе математического анализа обычно принято считать неопределенный интеграл множеством всех первообразных:

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\} \quad (F' = f, C \in \mathbb{R}).$$

Тогда равенства следует понимать как равенства множеств. В частности, запись выше означает, что множество решений является множеством всех первообразных функции $f(x)$ на интервале I . В курсах ОДУ традиционно под неопределенным интегралом понимают какую-либо фиксированную (произвольную) первообразную. Неопределенность интеграла означает, что нас интересует первообразная $F(x)$ с точностью до аддитивной постоянной C . Так удобнее в технических выкладках. Подобных уточнений можно избежать, записав все решения формулой

$$y = \varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C, \quad x \in I.$$

Здесь x_0 — произвольное фиксированное число из интервала I , а $C \in \mathbb{R}$ — произвольная (варьируемая) постоянная. Обозначения традиционны, так что константу C от функционального пространства C отличаем по контексту. Других решений уравнения $y' = f(x)$ нет. Уже на простейшем примере замечаем, что у ОДУ, вообще говоря, бесконечно много решений.

2°. Элементарные функции $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ являются решениями уравнений (какие каких?) $y' = y$, $y'' + y = 0$, $x \in I = \mathbb{R}$. Решениями являются и функции $C \exp x$, $C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Указанные элементарные функции можно *определить* как решения соответствующего уравнения с дополнительными условиями $y(0) = 1$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$ (правда, доказательство теоремы существования и единственности решений

вперед). Уникальность и востребованность экспоненты на языке дифференциальных уравнений объясняются просто: $y' = y$.

3°. Основой классической механики является второй закон Ньютона $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$, где m — масса материальной точки, движущейся под действием силы F ; $x(t)$ — положение точки в момент времени t (на прямой, на плоскости, в пространстве). Точками сверху, вслед за Ньютоном, обозначают производные по времени. Фазовым пространством, т. е. пространством состояний, является множество $\{(x, \dot{x})\}$. Решением уравнения — закон движения $x = \varphi(t)$ (отображение $t \mapsto \varphi(t)$ на рассматриваемом промежутке времени $\langle t_1, t_2 \rangle$).

В классической общей постановке задачи (сложившейся исторически) *решить уравнение* — значит найти все его решения $\{\varphi, \langle a, b \rangle\}$. При этом говорят об *интегрируемости в квадратурах*, если решение уравнения представимо в общем виде суперпозицией конечного числа арифметических операций, элементарных функций, операций дифференцирования и интегрирования (даже если интегралы «не берутся» в элементарных функциях). Вместо уточнения «общего вида» пока можно ограничиться интуитивным представлением о единой для всех решений формуле указанного класса. Поскольку простейшие ОДУ решаются с помощью интегрирования, то процесс нахождения решения по укоренившейся традиции называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В истории математики известны проблемы, «отрицательное» решение которых являлось мощным стимулом развития. Достаточно упомянуть разрешимость алгебраических уравнений в радикалах (теория Абеля–Галуа). В 1841 г. Лиувилль доказал, что уже простейшее дифференциальное уравнение *Риккати* $y' + y^2 = x^\alpha$ интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях (при значениях α , указанных еще Д. Бернулли). Это инициировало развитие качественных, асимптотических, приближенных (в том числе и численных) методов исследования. В приложениях не так часто требуется найти все решения. За редким исключением это практически невозможно. Обычно имеется дополнительная информация (например, начальные или граничные условия), необ-

ходимо выделить решения с определенными свойствами (ограниченные, устойчивые, ...), поэтому в дальнейшем не будем систематически развивать теорию *общего решения*. Это требует более углубленного изучения и к тому же имеются различные определения общего решения (см. ссылку на с. 159 в книге [3]).

Замечание 2. Следует иметь в виду, что терминология складывалась исторически, так что необходимо внимательно относиться к используемым понятиям и определениям. Конечно, хотелось бы представить одной формулой все решения. По мере возникновения и изучения простейших ОДУ это удавалось, но для более сложных объектов (уравнений n -го порядка, систем уравнений) такая цель становилась все более «теоретической». Ни о каких элементарных функциях и квадратурах уже речь не идет. В конструктивном плане вполне может оказаться достаточным определение общего решения в следующем («слабом») смысле. Для примера ограничимся уравнением второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ ($m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$): это функция $y(x, C_1, C_2)$, которая позволяет выбором параметров $C_{1,2}$ получить решение любой задачи Коши $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ в заданной области начальных данных $D = \{(x_0, y_0, y_1)\}$. Вопрос о том, все ли это решения, целесообразно выделить отдельно (по аналогии с продолжимостью на $\langle a_1, b_1 \rangle \supset \langle a, b \rangle$). В принципе D не обязательно область, I — промежуток, параметров желательно меньше: концепция общего решения зависит от конкретной задачи.

Замечание 3. Полезно ознакомиться с эволюцией даже такого базового понятия, как функция. «А во времена Ньютона под словом функция понимали только очень хорошие вещи. Иногда это были многочлены, иногда рациональные функции, но во всяком случае все они были аналитическими в своей области определения и разлагались в ряды Тейлора» [Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. С. 24]. «Для Эйлера и других математиков XVII и XVIII веков «функция» означала нечто такое, что можно записать в виде явной формулы ... или, возможно, что-то, определяемое интегралом или задаваемое степенным рядом» [Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. М.; Ижевск, 2007. С. 107].

В заключительной части введения приведем примеры математических моделей в форме дифференциальных уравнений. Первый пример относится к механике, «колыбели» теории (наряду с геометрией и математической физикой). Второй из области физической химии. Круг задач, при решении которых математическое моделирование является одним из эффективных инструментов исследования, неуклонно расширяется. Перед математиками редко ставят полностью формализованные задачи. Необходимо осваивать (и с большой пользой для математических обобщений) сведения из физики, химии, биологии, медицины ... — до дифференциальных уравнений еще нужно «добраться». Требуется выделить определяющие параметры (лимитирующие факторы) и описать их взаимосвязи.

Если читатель спешит обратиться к изучению общей теории, то примеры моделей достаточно просмотреть «по диагонали».

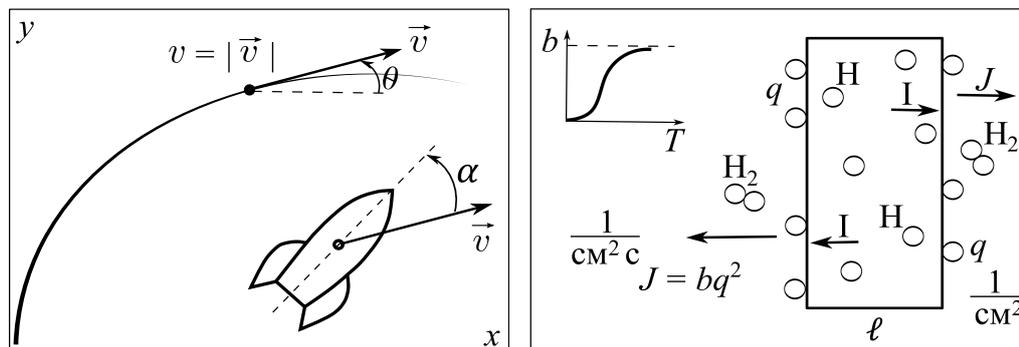


Рис. 0.1. Движение центра масс

Рис. 0.2. Термодесорбция H_2

Движение центра масс ЛА. Преследуя исключительно мирные цели (например, метеорологические), рассмотрим простейшую модель движения центра масс летательного аппарата (ЛА) в вертикальной плоскости (рис. 0.1). Старт происходит с поверхности Земли, точку старта принимаем за начало отсчета. Высота и дальность полета невелики, так что ограничимся плоским представлением о земной поверхности. Учтем силу тяжести (mg), тягу двигателя ($F_T = T(t)$) и сопротивле-

ние среды ($F_c = cSq$). Силы F_T, F_c направлены вдоль вектора скорости \vec{v} центра масс (материальной точки) в противоположных направлениях. Уточним терминологию и обозначения: c — коэффициент лобового сопротивления, S — площадь характерного (миделевого) сечения; $q = \rho v^2/2$ — скоростной напор, $\rho = \rho_0 \exp\{-ky\}$ — плотность атмосферы на высоте y , $v = |\vec{v}|$. С высотой плотность экспоненциально убывает ($k > 0$).

Обозначив через θ угол наклона вектора скорости \vec{v} к местному горизонту, спроектируем векторное уравнение второго закона Ньютона $d(m\vec{v})/dt = \vec{F}$ на оси координат «длина – высота»:

$$OX: \quad m\dot{x} + m\ddot{x} = T(t) \cos \theta(t) - cSq \cos \theta(t),$$

$$OY: \quad m\dot{y} + m\ddot{y} = T(t) \sin \theta(t) - cSq \sin \theta(t) - mg,$$

$$\theta = \arctg(\dot{y}/\dot{x}), \quad q = \rho_0 \exp\{-ky\}v^2/2, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Изменение массы $m = m(t)$ обусловлено расходом топлива.

Преобразуем систему ОДУ четвертого порядка (два уравнения второго порядка) к более удобной системе уравнений первого порядка. Для этого от фазового пространства $\{(x, y, \dot{x}, \dot{y})\}$ перейдем к $\{(x, y, v, \theta)\}$. Сначала вычислим ускорения:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta \Rightarrow \ddot{x} = \dot{v} \cos \theta - v\dot{\theta} \sin \theta, \quad \ddot{y} = \dot{v} \sin \theta + v\dot{\theta} \cos \theta.$$

Подставим эти выражения в уравнения второго порядка:

$$\dot{m}v \cos \theta + m\dot{v} \cos \theta - mv\dot{\theta} \sin \theta = T(t) \cos \theta - cSq \cos \theta,$$

$$\dot{m}v \sin \theta + m\dot{v} \sin \theta + mv\dot{\theta} \cos \theta = T(t) \sin \theta - cSq \sin \theta - mg.$$

Домножим первое уравнение на $\cos \theta$, второе на $\sin \theta$ и сложим:

$$\dot{m}v + m\dot{v} = T(t) - cSq - mg \sin \theta \quad (q = \rho_0 \exp\{-ky\}v^2/2).$$

Если множители $\cos \theta, \sin \theta$ заменить на $\sin \theta, -\cos \theta$, то приходим к дифференциальному уравнению $\dot{\theta}(t) = -g \cos \theta(t)/v(t)$.

Итак, в фазовом пространстве $\{(x, y, v, \theta)\}$ получаем систему

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad v\dot{\theta} = -g \cos \theta,$$

$$m\dot{v} = T(t) - cSq - mg \sin \theta - \dot{m}v, \quad q = q(y, v).$$

Для определения движения и траектории полета достаточно задать начальные данные: $x(0) = y(0) = 0$, $v(0) = v_0$, $\theta(0) = \theta_0$.

В случае запуска «из пушки», когда отсутствует двигатель, выполняется $T = 0$, $\dot{m} = 0$, $v_0 > 0$, что приводит к упрощению:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad v\dot{\theta} = -g \cos \theta, \quad m\dot{v} = -cSq - mg \sin \theta.$$

Даже упрощенная система не интегрируется в квадратурах, для расчета движения применяют численные методы. Отметим, что квадратичность скоростного напора является аэродинамической проблемой: рост скорости в n раз сопряжен с ростом сопротивления в n^2 раз. Модель можно уточнять с учетом геометрии ЛА. Например, тяга направлена вдоль продольной оси ЛА и между вектором скорости \vec{v} центра масс и осью имеется угол атаки α . Коэффициент лобового сопротивления, подъемная сила и значение S зависят от α . Всем знакома картина, когда перед посадкой самолет «задирает нос», увеличивая угол атаки. Учет бокового ветра и органов управления делает задачу пространственной. Рассмотрена лишь простейшая модель, для уточнений следует обратиться к книгам по аэродинамике.

Водородопроницаемость конструкционных материалов

Водород рассматривается как один из перспективных экологически чистых энергоносителей. Наиболее мощные ракетные двигатели — водородные, в ходу и небольшие партии автомобильных двигателей. Энтузиасты уже говорят о водородной энергетике. Отдаленные перспективы управляемого термоядерного синтеза также связаны с водородом (его изотопами). Для решения задач хранения, транспортировки, защиты окружающей среды необходимы соответствующие материалы. Значительная концентрация водорода в металлах приводит к его охрупчиванию. С этим приходится считаться при проектировании объектов химического машиностроения. Итак, по ряду причин интерес к кинетике взаимодействия водорода с конструкционными материалами высок. Вычислительное материаловедение призвано сузить диапазон поиска материалов с заданными свойствами, сократить расходы на эксперименты, выявить лимитирующие

факторы (в том числе и при экстремальных условиях эксплуатации материала, когда эксперимент затруднителен).

Остановимся на одном из эффективных экспериментальных методов — термодесорбционной спектроскопии (ТДС). Пластина из исследуемого материала (например, металлического сплава) помещается при достаточно высокой температуре \bar{T} в камеру с молекулярным водородом. Через определенное время образец насыщается растворенным (атомарным) водородом. Затем нагрев пластины прекращается, камера вакуумируется и в условиях последующего монотонного нагрева с помощью масс-спектрометра регистрируется поток водорода из образца (рис. 0.2). По этой экспериментальной информации, в частности, оценивают кинетические параметры водородопроницаемости конкретного конструкционного материала.

Перейдем к построению простейшей математической модели, акцентируя внимание на поверхностных процессах. По постановке эксперимента атомы водорода *диффундируют* из объема к поверхности, соединяются в молекулы и покидают поверхность (*десорбируются*, процесс поглощения называется *сорбцией*). Считаем диффузию одномерной (по толщине $x \in [0, \ell]$ относительно тонкой пластины), влиянием торцов пренебрегаем. Нагрев реализуется практически равномерным: $T(t, x) = T(t)$.

Обозначим плотность потока H из объема на поверхность через $I(t)$. Величина $I(t)$ (единица измерения $[I] = 1/\text{см}^2\text{с}$) численно равна количеству атомов H , вышедших из объема на единичную площадку поверхности за единицу времени.

Через $q(t)$ обозначим поверхностную концентрацию атомов водорода ($[q] = 1/\text{см}^2$). Вероятность встречи и соединения двух атомов в молекулу H_2 , покидающую поверхность, пропорциональна $q^2(t)$ (вспомним школьный курс химии: скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс). В связи с этим плотность десорбционного потока молекулярного водорода из образца в вакуумируемую камеру моделируется выражением $J(t) = b(T)q^2(t)$. Подсчет ведем в атомах: $[J] = 1/\text{см}^2\text{с}$. Коэффициент десорбции зависит от температуры по закону Аррениуса: $b(T) = b_0 \exp\{-E_b/[RT]\}$, $b_0, E_b, R = \text{const}$. График та-

кой функции имеет S -образный вид кривой насыщения: с ростом температуры ($[T] = K^\circ$) наблюдается рост параметра b с асимптотическим выходом на горизонтальную асимптоту. Нагрев эффективен, но лишь в определенных пределах. Формально для начальной модели информации достаточно, но целесообразно уточнить терминологию для ориентировки в специальной литературе: b_0 — *предэкспонента* ($\sup b$), E_b — *энергия активации десорбции*, R — универсальная газовая постоянная. Обычно в эксперименте реализуется линейный нагрев $T(t) = T_0 + vt$.

Теперь мы в состоянии записать простейшую модель:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= -b(T)q^2(t) + I(t), \quad q(0) = \bar{q}, \\ b(T) &= b_0 \exp\{-E_b/[RT]\}, \quad T(t) = T_0 + vt.\end{aligned}$$

Начальные данные \bar{q} определяются начальным (равновесным) насыщением поверхности при фиксированной температуре \bar{T} . Дифференциальное уравнение записано из соображений материального баланса. Представим себе единичную площадку поверхности (при $x = 0$ или $x = \ell$). Справа в уравнении — разность потоков из объема образца на поверхность и с поверхности в объем камеры. Этот дисбаланс определяет изменение концентрации на поверхности (производную \dot{q}). Полученное уравнение относится к классу с богатой историей — это *уравнение Риккати* (см. главу I). Правда, Риккати (1676–1754) изучал уравнения с квадратичной нелинейностью совсем по другому поводу.

ДОПОЛНЕНИЕ 1. Строго говоря, модель «незамкнута», поскольку трудно рассчитывать на измерение значений функции времени $I(t)$. Для дальнейших уточнений не обойтись без дополнительных сведений из математической физики, поэтому факультативно продолжим построение модели «аксиоматически».

Обозначим через $c(t, x)$ концентрацию атомов H в образце в момент времени t на глубине $x \in [0, \ell]$ ($[c] = 1/\text{см}^3$). По постановке эксперимента имеет место симметрия $c(t, x) = c(t, \ell - x)$. Плотность диффузионного потока из объема на поверхность моделируется выражением $I(t) = D(T)\partial_x c(t, 0) = -D(T)\partial_x c(t, \ell)$, где D — *коэффициент диффузии*, а ∂ — символ частной про-

изводной ($\partial_x c \equiv c_x \equiv \partial c / \partial x$). Здесь уместна аналогия с потоком воды: чем круче горка (больше величина градиента), тем интенсивнее поток. Зависимость от температуры также предполагается аррениусовской: $D(T) = D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$. Распределение $c(t, x)$ концентрации в объеме описывается *уравнением диффузии* $\partial_t c(t, x) = \partial_x [D(T)\partial_x c(t, x)]$. Это уже *уравнение в частных производных*, поскольку в него входят производные по независимым переменным t и x . Для полноты модели остается связать поверхностную концентрацию с приповерхностной объемной, например, условием быстрого растворения $c(t, 0) = c(t, \ell) = g(T)q(t)$, и добавить начальные данные $c(0, x) = \bar{c} = g\bar{q}$ (при температуре начального насыщения \bar{T}). Пропорциональность gq отражает простейшую связь концентраций: чем больше атомов водорода на поверхности, тем больше их в приповерхностном объеме (и наоборот).

Итак, модель может содержать как обыкновенные, так и «необыкновенные» дифференциальные уравнения. Процесс уточнения модели неограничен: можно учесть *ресорбцию* (частичный возврат на поверхность), несимметричность (*анизотропность*) процессов растворения в объем и выхода на поверхность, ограниченную емкость дефектов (*ловушек*), зависимость коэффициента диффузии от концентрации, неравномерность прогрева образца, *термодиффузию* . . . При этом появляются все новые коэффициенты, значения которых необходимо оценивать по экспериментальным данным (*обратные задачи*). Следует вóвремя остановиться в зависимости от цели моделирования.

Ограничившись лишь двумя примерами (которые достаточно просмотреть на интуитивном уровне), перейдем, начиная с главы I, к систематическому изложению основ общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Дополнение 2. В заключение введения «на всякий случай» приведем используемую геометрическую терминологию «пространств». Рассматриваем процессы, состояние которых в рамках модели представляется конечным набором числовых параметров. Например, состоянием материальной точки в классической механике является её положение и скорость (6 парамет-

ров в пространственном случае). Среди числовых характеристик могут оказаться и давление, температура, углы . . . Множество возможных состояний образует *фазовое пространство* X . В конечномерном случае X обычно является *n -мерным дифференцируемым многообразием* (см., например, [2]).

По умолчанию далее ограничиваемся вещественными числами. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, состоящее из упорядоченных наборов n чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, обычно наделяется дополнительной структурой в зависимости от решаемой задачи. Определив покомпонентно сложение и умножение на число, получаем структуру *линейного пространства*. В общей теории линейных пространств их элементы называются *векторами*. Обратно, пусть задано n -мерное линейное (векторное) пространство \mathcal{L} . Фиксируем базис. Тогда векторы можно отождествить с наборами (x_1, \dots, x_n) их координат. Линейным комбинациям векторов однозначно соответствуют комбинации координат. Говорят об *изоморфизме* линейных пространств: $\mathcal{L} \equiv \mathbb{R}^n$.

Одной из основополагающих в геометрии является операция скалярного (внутреннего) произведения векторов $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в линейном n -мерном пространстве \mathcal{L} . На аксиоматике не останавливаемся. Получаем *евклидово пространство* \mathcal{E} . Появляется возможность определить длину вектора $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, угол между ненулевыми векторами ($\cos \theta = \langle x, y \rangle / (|x||y|)$, $\theta \in [0, \pi]$), ортогональность ($x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$). В ортонормированном базисе имеем координатное представление $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

В задачах геометрического и физического характера часто оперируют точками, взаимным расположением тел и фигур, в то время как линейные операции отступают на второй план. Подходящей математической абстракцией является *аффинное пространство*. Его элементы называются точками. Каждой паре точек (A, B) сопоставлен вектор \overrightarrow{AB} *ассоциированного* пространства \mathcal{L} . Точки A, B называются соответственно началом и концом вектора. Мысленно представляем себе точки, соединенные направленным отрезком со стрелочкой. Аксиомы в кратком изложении опускаем. Определено сложение точки и вектора ($A + \overrightarrow{AB} = B$), вычитание точек ($B - A = \overrightarrow{AB}$), но не сложение

точек. Можно определить аффинное пространство как тройку {множество точек, линейное пространство, операция сложения точки и вектора} с соответствующей аксиоматикой, но такой уровень абстракции (если угодно, строгости) не потребуется.

Если в ассоциированном линейном (векторном) пространстве \mathcal{L} ($\dim \mathcal{L} = n$) ввести скалярное произведение, то получаем евклидово (точечно-векторное) пространство E (E^n).

Всякое n -мерное линейное пространство \mathcal{L} можно рассматривать как аффинное: достаточно элементы назвать точками и каждой паре (теперь уже точек) v, w поставить в соответствие вектор $w - v \in \mathcal{L}$. Обратное, всякое аффинное пространство можно рассматривать как линейное, зафиксировав точку — начало координат O . Тогда произвольной точке P сопоставим радиус-вектор \overrightarrow{OP} , отождествляя таким образом точки и векторы. Выбор *репера* (точки O и базиса $\{v_i\} \subset \mathcal{L}$) дает возможность говорить об *аффинных координатах* точки P : $\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \Rightarrow P = (x_1, \dots, x_n)$. В случае ортонормированного базиса $\{v_i^\perp\}$ (когда $\mathcal{L} = \mathcal{E}$) получаем прямоугольную декартову систему координат.

В курсе ОДУ нет необходимости в усложнении обозначений. В множестве \mathbb{R}^n упорядоченных наборов чисел (x_1, \dots, x_n) в дальнейшем по контексту подразумевается та или иная структура *пространства*. Оперлируем точками и сдвигами на векторы — имеем в виду аффинное пространство. Вычисляем скалярные произведения, длины — подразумеваем евклидову структуру. По умолчанию \mathbb{R}^n считаем «полностью оснащенным» (включая евклидову метрику): его элементы и точки и векторы,

$$O = (0, \dots, 0), v_i^\perp = (0, \dots, 1, \dots, 0), \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \\ |x|^2 = \langle x, x \rangle, \rho^2(x, y) = |x - y|^2 = \langle y - x, y - x \rangle = \langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy} \rangle.$$

По контексту, если A — матрица $n \times n$, то в записи xA слева строка x , а в записи Ax справа столбец: $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Глава I

Методы интегрирования ОДУ 1-го порядка

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом параграфе рассмотрим ОДУ 1-го порядка в *нормальной форме* (разрешенное относительно производной):

$$y' = f(x, y), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad G \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Здесь G — область (открытое связное множество), правая часть уравнения f как минимум предполагается непрерывной в G . Функция $y = \varphi(x)$, $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, называется *решением* уравнения, если на промежутке $\langle a, b \rangle$ выполняются условия:

$$1) \exists \varphi'(x); \quad 2) (x, \varphi(x)) \in G; \quad 3) \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Множеством определения решения является промежуток вещественной оси $\langle a, b \rangle = (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$. В граничных точках производные понимаются как односторонние. Допускаются несобственные значения $a = -\infty, b = +\infty$ (в случае их исключения). Решение определяется как отображение $x \mapsto \varphi(x)$ с указанием промежутка $\langle a, b \rangle$, т. е. пара $\{\varphi, \langle a, b \rangle\}$. При необходимости подчеркнуть отличие функции φ как элемента функционального пространства от её значения $\varphi(x)$ используется запись $\varphi(\cdot)$. Во избежание оговорок об односторонних производных в общих рассуждениях считаем промежуток $\langle a, b \rangle$ интервалом $I = (a, b)$.

Рассмотрим пример: $\forall C \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(x) = 1/(C - x)$, определенная $\forall x \neq C$, не является решением дифференциального уравнения $y' = y^2$, хотя $\varphi'(x) \equiv \varphi^2(x)$, $x \neq C$. Область определения этого уравнения (правой части) есть вся плоскость $Oxy: G = \mathbb{R}^2$. Сужение функции φ на любой промежуток $\langle a, b \rangle \subseteq (-\infty, C)$ или $\langle a, b \rangle \subseteq (C, +\infty)$ определяет решение.

График решения $\Gamma = \{(x, \varphi(x))\} \subset G$ называется *интегральной кривой*. Исходное предположение $f \in C(G)$ и тождество $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ на интервале I влекут непрерывность производной $\varphi'(x)$, т. е. включение $\varphi \in C^1(I)$. Множество значений $\gamma = \{\varphi(x)\}$ называется *фазовой кривой*. Это ортогональная проекция интегральной кривой на фазовое пространство $\{y\} = \mathbb{R}$ (рис. 1.1). Когда G имеет структуру прямого произведения $G = I_1 \times I_2$ двух интервалов, можно считать фазовым пространством $\{y\} = I_2$. В механической терминологии дифференциальное уравнение обычно записывают в форме $\dot{x} = f(t, x)$ ($\dot{x} \equiv dx/dt$) и независимую переменную t называют временем. Фазовая кривая является траекторией движения. Это лишь часть информации $\{x(t)\}$ о законе движения $t \mapsto x(t)$.



Рис. 1.1. Решение ОДУ

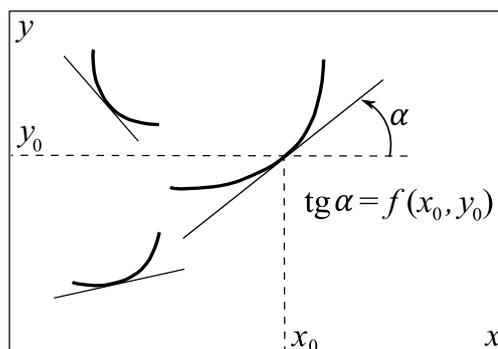


Рис. 1.2. Поле направлений

Геометрическая интерпретация. Сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ прямую, проходящую через эту точку с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$ (рис. 1.2). Говорят, что дифференциальное уравнение (его правая часть) определяет *поле направлений* в области G . Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной к графику функции ($y' = \operatorname{tg} \alpha$). Из определения решения уравнения следует, что гладкая кривая

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I, \varphi \in C^1(I)\} \subset G$$

является интегральной кривой тогда и только тогда, когда касая-

тельная в каждой точке кривой совпадает с направлением в этой же точке. Уравнения $f(x, y) = \text{const}$ определяют *изоклины* — множества точек с одинаковым направлением. Изоклины позволяют на качественном уровне представить себе геометрическую структуру множества интегральных кривых. В курсе математического анализа строились касательные к кривым. Здесь сталкиваемся с обратной задачей: зная поле направлений ($\text{tg } \alpha = f$), требуется строить интегральные кривые (кривые, *касающиеся* поля). При определении поля направлений вместо прямых можно ограничиться единичными отрезками прямых с центром в точке или откладывать касательные векторы $(1, f(x_0, y_0))$.

В области G функция f определяет поле направлений без вертикальных прямых ($\text{tg } \alpha \in \mathbb{R}$). Интегральные кривые являются графиками функций от x , но в геометрических задачах часто переменные x, y равноправны: искомую кривую (её часть) допустимо искать как график функции $x = \psi(y)$, принимая y за независимую переменную. Тогда наряду с исходным рассматривают так называемое перевернутое дифференциальное уравнение $dx/dy = 1/f(x, y)$, лишь бы однозначно определялось поле направлений, включая вертикальные прямые.

Задача Коши. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет бесконечно много решений. Какие дополнительные условия способны выделить одно решение? Один из вариантов: задаются начальные данные $(x_0, y_0) \in G$, и требуется найти такое решение $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, что $x_0 \in I$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Геометрически: найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0) . Это *задача Коши* (или *начальная задача*). В общих рассуждениях, чтобы избежать оговорок об односторонних производных, считаем G областью, а I интервалом, содержащим x_0 . При необходимости задачу Коши можно ставить, например, на промежутках $\langle a, x_0 \rangle$, $[x_0, b)$ или в асимптотическом смысле $y \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$ (когда $(x_0, y_0) \in \partial G$).

ТЕОРЕМА (Пеано (1858–1932)). При условии непрерывности функции f в области G для любых начальных данных $(x_0, y_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

В более компактной записи: $f \in C(G) \Rightarrow \forall (x_0, y_0) \in G$

$$\exists y = \varphi(x) \ (x \in I = (a, b)): x_0 \in I, \varphi(x_0) = y_0.$$

Доказательство изложено, например, в [21, 27]. Непрерывность правой части уравнения $y' = f(x, y)$ предполагаем далее по умолчанию. Зафиксировав x_0 и варьируя y_0 (оставаясь в пределах области G), получаем бесконечное число решений. Решения с различными y_0 не совпадают в окрестности x_0 по непрерывности. При дополнительном условии $\partial_y f \in C(G)$ имеет место единственность (глава II, теорема Пикара (1856–1941)). Здесь единственность понимается в том смысле, что любые два решения начальной задачи, определенные соответственно на интервалах I_1 и I_2 , совпадают на пересечении $I_1 \cap I_2$. Условие непрерывности частной производной $\partial_y f \equiv f'_y \equiv f_y$ можно ослабить, но без дополнительного требования к $f \in C(G)$ не обойтись.

В качестве примера рассмотрим в области $G = \mathbb{R}^2 = Oxy$ уравнение $y' = 3y^{2/3}$. Подстановкой убеждаемся, что функции $y = (x - C)^3$, $y = 0$ являются решениями, определенными на интервале $I = \mathbb{R}$ (максимально возможном). Через каждую точку (x_0, y_0) проходит бесконечное множество различных интегральных кривых $\{(x, \varphi(x))\}$, определенных при $x \in \mathbb{R}$, поскольку можно гладко склеивать ветви кубических парабол с отрезками оси абсцисс. На оси Ox через каждую точку $(x_0, 0)$ проходят по крайней мере две интегральные кривые (укажите большее их число для данного примера), которые не совпадают в любой окрестности точки $(x_0, 0)$. Точки, обладающие таким свойством, являются *особыми*. Решение $y = 0$ называется *особым*: его интегральная кривая целиком состоит из особых точек. Общие определения будут приведены позже. В примере $f_y = 2y^{-1/3}$ и при $y = 0$ нарушаются условия теоремы Пикара. В областях $G: y > 0$ и $G: y < 0$ имеет место единственность решения задачи Коши: любые две интегральные кривые, проходящие через точку (x_0, y_0) , $y_0 \neq 0$, и находящиеся в пределах полуплоскости, совпадают при общих значениях x из промежутков определения.

Продолжимость решений. Формально каждое решение $\{\varphi, I\}$ можно превратить в бесконечную совокупность решений, рас-

смаатривая сужения функции φ на подынтервалы I . Наведем в определенной степени «порядок» в этом вопросе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение $y = \varphi(x)$ ($\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$) *продолжимо вправо*, если существует решение $y = \psi(x)$ ($x \in \langle a, d \rangle$, $d > b$), сужение которого на промежуток $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\varphi(x)$.

Решение ψ называется *продолжением вправо* решения φ . Аналогично определяется *продолжение влево*. Решение *полное*, если оно непродолжимо ни вправо, ни влево. Пусть решение φ определено на промежутке $\langle a, b \rangle$. В условиях теоремы Пеано ($f \in C$) решение может быть продолжено вправо. Достаточно рассмотреть начальные данные $(x_0, y_0) = (b, \varphi(b))$ и склеить сужение на $[b, d)$ решения задачи Коши с исходным решением на $\langle a, b \rangle$. Из этого следует, что областью определения полного решения является некоторый интервал (α, β) , который называется *максимальным интервалом существования* решения.

В условиях единственности решения задачи Коши (достаточно $f, f_y \in C$) естественно рассматривать классы эквивалентности решений, получаемых друг из друга операциями сужения и продолжения. В этом смысле решение задано с точностью до принадлежности одному классу. В геометрических терминах область G расслаивается на непересекающиеся интегральные кривые, соответствующие различным полным решениям.

В дальнейшем изложении в теоретических рассмотрениях, если не оговорено особо, решения ОДУ понимаются полными.

Уравнение в симметричной форме. Общий вид:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Считаем функции P и Q как минимум непрерывными в рассматриваемой области G . Переменные x, y в такой записи равноправны, что особенно характерно для геометрических задач. Например, уравнение $y' = y/x$ подразумевает $x \neq 0$ и поиск решения в форме $y(x)$. Запись $x' = x/y$ по умолчанию означает $y \neq 0$ и $x(y)$. Симметричная форма $x dy - y dx = 0$ позволяет задать поле направлений в области $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пусть в области G функции P и Q одновременно в нуль не обращаются. Точки, в которых $P = Q = 0$ называются *особыми* точками уравнения $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, пока их не рассматриваем. Тогда в G уравнение можно воспринимать как символическую запись двух дифференциальных уравнений:

$$y'_x \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad x'_y \equiv \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Поясним смысл этого высказывания. При условии $P^2 + Q^2 \neq 0$ в каждой точке области G определено поле направлений. Если $Q \neq 0$, то в окрестности такой точки рассматриваем первое уравнение и получаем поле направлений без вертикальных прямых. Аналогично, в окрестности точки, где $P \neq 0$, имеем направления без горизонтальных прямых. Если $P \neq 0$ и $Q \neq 0$, то определенные выше направления совпадают ($y'_x = 1/x'_y$). Первичным считаем задание поля направлений. Когда поле задано, возникает задача построения интегральных кривых (*интегральных линий* поля направлений). Ищем гладкие кривые в области G , касающиеся в каждой своей точке поля направлений.

Для начальных данных (x_0, y_0) ($Q(x_0, y_0) \neq 0$) рассматриваем первое уравнение и определяем решение задачи Коши в форме $y = \varphi(x)$ ($x \in I = (a, b)$, $x_0 \in I$). Если $P(x_0, y_0) \neq 0$, то получаем $x = \psi(y)$ ($y \in J = (c, d)$, $y_0 \in J$). В условиях единственности решения задачи Коши при одновременном выполнении неравенств $Q(x_0, y_0) \neq 0$ и $P(x_0, y_0) \neq 0$ получаем в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) одну и ту же гладкую кривую (как подмножество G), проходящую через (x_0, y_0) .

Более общим является параметрическое задание

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (t_1, t_2),$$

$$(\varphi(t), \psi(t)) \in G, \quad \varphi, \psi \in C^1, \quad \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 > 0.$$

Множество $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t))\} \subset G$ называется *интегральной линией* (кривой), а отображение $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ решением уравнения $P dx + Q dy = 0$, если выполняется тождество

$$P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t) \equiv 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Это согласуется с вышеизложенным в силу $y'_x = \dot{y}/\dot{x}$, $x'_y = \dot{x}/\dot{y}$. Формально в уравнение $P dx + Q dy = 0$ подставляем

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad dx = \dot{\varphi}(t) dt, \quad dy = \dot{\psi}(t) dt$$

и сокращаем на приращение dt независимого аргумента. В частных случаях, когда $y = \varphi(x)$ ($x \in I$) или $x = \psi(y)$ ($y \in J$), имеем $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$, $P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) \equiv 0$.

Если записать уравнение $y' = f(x, y)$ в форме $dy/dx = f(x, y)$ и воспринимать производную как отношение дифференциалов (а Лейбниц и ввел это обозначение как дробь), то получим $P dx + Q dy = 0$, где $P = -f$, $Q = 1$. Первичным понятием можно (и даже естественнее с точки зрения функционального анализа) считать дифференциал как линейную часть приращения функции: $\Delta y = A\Delta x + o(|\Delta x|)$. Тогда коэффициент A и есть производная, вычисляемая делением $dy = A\Delta x$ на $dx = \Delta x$.

Дополнение. В заключение приведем комментарий к определению гладкой кривой. *Параметризованной гладкой кривой* в области G называется отображение $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ с указанными выше свойствами. Рассмотрим её *носитель* (образ)

$$\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in (t_1, t_2)\} \subset G.$$

Фиксируем $t_0 \in (t_1, t_2)$. Пусть для определенности $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ ($\dot{\varphi}(t_0) > 0$). Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место взаимно-однозначное соответствие $t \leftrightarrow x = \varphi(t)$ ($|t - t_0| < \varepsilon$) и множество $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon\} \subseteq \Gamma$ можно представить как график непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$, $x \in (\varphi(t_0 - \varepsilon), \varphi(t_0 + \varepsilon))$. Если функции φ, ψ продолжимы по непрерывности на отрезок $[t_1, t_2]$ и нет самопересечений:

$$(\varphi(\tau_1), \psi(\tau_1)) \neq (\varphi(\tau_2), \psi(\tau_2)), \quad \tau_i \in [t_1, t_2], \quad \tau_1 \neq \tau_2,$$

то Γ ($t \in (t_1, t_2)$) является одномерным *дифференцируемым многообразием* (*простой гладкой дугой*) в области G . Если неравенство сохраняется при $\tau_i \in (t_1, t_2)$ и выполнена гладкая склейка

$$(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2)), \quad (\dot{\varphi}(t_1), \dot{\psi}(t_1)) = (\dot{\varphi}(t_2), \dot{\psi}(t_2)),$$

то получаем *гладкий контур*. Терминология разнообразна. Например, наряду с *кривой* используется термин *путь*. Необходимо по контексту следить, что понимается под кривой (отображение или его образ) и что вкладывается в термин «гладкость».

С оговоркой об односторонних производных изложенное переносится на промежутки $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$, $\langle t_1, t_2 \rangle$. К дифференциальному уравнению в симметричной форме мы еще вернемся при рассмотрении векторных полей на плоскости.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ

Рассмотрим некоторые типы ОДУ 1-го порядка, допускающие интегрирование в квадратурах элементарными методами.

Уравнение с разделяющимися переменными. В предположении $g(y) \neq 0$ ограничимся уравнением в нормальной форме

$$y' = f(x)g(y), \quad f \in C(I), \quad g \in C(J), \quad I = (a, b), \quad J = (c, d).$$

Поставим своей целью свести это уравнение к недифференциальному соотношению. Уточним смысл этой задачи и представим метод её решения, разбив изложение на несколько этапов.

1°. Сначала покажем, что решения дифференциального уравнения удовлетворяют некоторому «обычному» уравнению (без производных). Для произвольного (полного) решения $y = \varphi(x)$ ($\varphi: (\alpha, \beta) \subseteq I \rightarrow J$) справедливы тождества

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} \equiv f(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt - \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau \equiv 0, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Здесь $x_0 \in (\alpha, \beta)$ — произвольное фиксированное число. В первом интеграле сделаем замену переменной интегрирования:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} g^{-1}(y) dy - \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau \equiv 0, \quad y_0 := \varphi(x_0), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Иногда будем использовать символ $:=$ для того, чтобы подчеркнуть равенство по определению. Итак, здесь y_0 — обозначение.

Фиксируем первообразные функций $1/g(y)$ и $f(x)$:

$$G(y) = \int_{y_0}^y g^{-1}(s) ds, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds, \quad x \in I, y \in J.$$

Таким образом, решение $y = \varphi(x)$ на интервале своего определения $(\alpha, \beta) \subseteq I$ удовлетворяет уравнению $G(y) - F(x) = 0$, рассматриваемом в заданном прямоугольнике $\{(x, y)\} = I \times J$.

2°. Фиксируем произвольную точку $(x_0, y_0) \in I \times J$ и указанные первообразные $G(y), F(x)$. Приведем рассуждения в обратном направлении: покажем, что уравнение $G(y) - F(x) = 0$, рассматриваемое в прямоугольнике $I \times J$, неявно определяет решение задачи Коши $y = \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = y_0$. По построению выполняется $G(y_0) - F(x_0) = 0$. Поскольку $G'(y_0) = 1/g(y_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции найдется прямоугольник

$$\Pi = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subseteq I \times J, \quad (x_0, y_0) \in \Pi,$$

в котором уравнение $G(y) - F(x) = 0$ однозначно разрешимо относительно переменной y . Уточним формулировку теоремы: для достаточно малого прямоугольника Π на интервале (x_1, x_2) , содержащем x_0 , определена непрерывно дифференцируемая (*неявная*) функция $y = \varphi(x)$ со свойствами $\varphi(x_0) = y_0$,

$$(x, \varphi(x)) \in \Pi, \quad G(\varphi(x)) - F(x) \equiv 0,$$

$$(x, y) \in \Pi, \quad G(y) - F(x) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x).$$

Последняя строка характеризует единственность решения.

Проверим, что неявная функция $y = \varphi(x)$ ($x \in (x_1, x_2)$, $\varphi(x_0) = y_0$) является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx} (G(\varphi(x)) - F(x)) \equiv \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} - f(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi'(x) \equiv f(x)g(\varphi(x)).$$

Следовательно, решение задачи Коши существует для любых начальных данных $(x_0, y_0) \in I \times J$. Тожества справедливы для любой функции $y = \varphi(x)$ класса C^1 , отображающей некоторый

промежуток $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq I$ в интервал J и удовлетворяющей уравнению $G(y) - F(x) = 0$. Такая функция является решением дифференциального уравнения $y' = f(x)g(y)$.

3°. Докажем единственность решения задачи Коши в том смысле, что два решения $\varphi_i: I_i \subseteq I \rightarrow J$ совпадают на пересечении $R = I_1 \cap I_2$ интервалов определения. Обозначим через S подмножество R , на котором $\varphi_1 = \varphi_2$. Оно замкнуто в R :

$$x_k \in S \subseteq R, x_k \rightarrow \bar{x} \in R, \varphi_i \in C(R) \Rightarrow \varphi_1(\bar{x}) = \varphi_2(\bar{x}), \bar{x} \in S.$$

Вместе с тем множество S открыто в пересечении интервалов R . Действительно, выберем произвольную точку $\tilde{x} \in S$ и фиксируем новые начальные данные $x_0 = \tilde{x}$, $y_0 = \varphi_1(\tilde{x}) = \varphi_2(\tilde{x})$. В пределах достаточно малого прямоугольника Π графики решений совпадают в силу единственности неявной функции. Значит, точка \tilde{x} принадлежит S с некоторой окрестностью. Итак, множество S одновременно замкнуто и открыто в связном множестве (интервале) R . Тогда либо $S = \emptyset$, либо $S = R$. Исходное значение x_0 принадлежит S . Остается $S = R$.

Напомним, что топологическое пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух его непустых замкнутых (открытых) подмножеств без общих точек. Эквивалентное определение: одновременно открытыми и замкнутыми являются только X и \emptyset (см.: Зорич В. А. Математический анализ. М.: МЦНМО, 2002. Т. 2. С. 24).

Замечание 1. Единственность решения задачи Коши (в принятых определениях) доказана без дополнительного предположения $g' \in C(J)$ (хотя, как уже упоминалось, требование непрерывности f'_y в формулировке теоремы Пикара можно ослабить). «Взамен» учли структуру уравнения и условие $g(y) \neq 0 \forall y \in J$.

4°. Не обязательно оперировать первообразными в форме интегралов с переменным верхним пределом. Фиксируем произвольные первообразные $G(y)$, $F(x)$ функций $1/g(y)$, $f(x)$ и рассмотрим в прямоугольнике $I \times J$ уравнение

$$H(x, y) := G(y) - F(x) = C, \quad C = \text{const.}$$

Если взять $C \notin M = \{H(x, y) | (x, y) \in I \times J\}$, то решений нет. Любое решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x)g(y)$ удовлетворяет уравнению $H(x, y) = C$ с некоторой константой C , значение которой однозначно определяется любой точкой интегральной кривой. Действительно, обозначим эту точку через (x_0, y_0) . Тогда утверждение справедливо для $C = 0$ и первообразных, определенных выше с помощью определенных интегралов с переменными верхними пределами. Остается напомнить, что первообразные отличаются лишь на аддитивные константы. Очевидно, $C = H(x_0, y_0)$. Обратно, если найдено решение $y = \varphi(x)$ уравнения $H(x, y) = C$ ($(x, y) \in I \times J$) при некотором $C \in M$, определенное и непрерывно дифференцируемое на $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq I$, то это решение дифференциального уравнения.

При произвольных начальных данных $(x_0, y_0) \in I \times J$ уравнение $H(x, y) = C$, где $C = H(x_0, y_0)$, определяет решение задачи Коши как неявную функцию $y = \varphi(x)$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subseteq I$, содержащем x_0 . Решение задачи Коши единственно: любые два решения совпадают на пересечении интервалов своего определения. В геометрических терминах через любую точку $(x_0, y_0) \in I \times J$ проходит единственная интегральная кривая. Две интегральные кривые (графики решений задачи Коши) совпадают для общих x . Если решения продолжимы на промежутки, то равенство сохранится и на их пересечении по непрерывности.

Интегралы ОДУ. Функция $H(x, y)$ сохраняет постоянное значение при подстановке решения $y = \varphi(x)$. Такие функции называются *интегралами* дифференциального уравнения. В приложениях интегралы обычно отражают законы сохранения. Термин «интеграл» сложился исторически: в простых случаях, как выше, достаточно операции интегрирования. Для содержательности теории и приложений предполагают условие невырожденности: в сколь угодно малой окрестности любой точки интеграл не сводится к константе. Построенная функция H удовлетворяет этому требованию ($H'_y \neq 0$ и «работает» теорема о неявной функции, позволяющая локально определять решения задачи Коши в форме $y(x)$). Соотношение $H(x, y) = C$ называется *общим интегралом* уравнения $y' = f(x)g(y)$.

На этом интегрирование дифференциального уравнения считается законченным, задача сведена к поиску неявных функций. При этом часто проще найти представление $x = \psi(y)$ или решение в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Сформулируем компактно итог проведенных рассуждений. В квадратурах найден общий интеграл со следующими свойствами: 1) $H = \text{const}$ на любом решении $y = \varphi(x)$; 2) любая неявная функция $\varphi \in C^1(a, b)$ ($H(x, \varphi(x)) \equiv C \in M$) является решением; 3) $\forall (x_0, y_0) \in I \times J$ решение задачи Коши существует, единственно и неявно определяется уравнением $H(x, y) = H(x_0, y_0)$. По принятому определению (по крайней мере в пределах § 2) существование решения начальной задачи предполагается в форме $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, $x_0 \in I$. Единственность: если интегральные кривые пересекаются, то решения совпадают на пересечении промежутков определения.

Замена переменной. Приемы интегрирования ОДУ накапливаются естественным образом: стараются найти замену переменных, при которой уравнение приводится к уже исследованному типу. С этой точки зрения сделаем замену переменной y : $z = G(y)$, где G — какая-либо первообразная функции $1/g(y)$ на рассматриваемом интервале $J = (c, d)$, на котором по предположению $g(y) \neq 0$. Пусть для определенности $g(y) > 0 \forall y \in J$. Тогда переменная $z = G(y)$ строго возрастает на интервале J ,

$$z \in G(J) = (G(c), G(d)), \quad G(c) := G(c + 0), \quad G(d) := G(d - 0)$$

(не исключаются несобственные значения $\mp\infty$ односторонних пределов $G(y)$ при $y \rightarrow c$ и $y \rightarrow d$). Функция $G(y)$ задает диффеоморфизм интервала (c, d) на интервал $G(J)$: отображение взаимно-однозначно и непрерывно дифференцируемо вместе со своим обратным. Сделаем замену переменных $(x, y) \mapsto (x, G(y))$:

$$y' = f(x)g(y), \quad z'_x = G'_y y'_x = g^{-1}(y)y' \Rightarrow z' = f(x), \quad x \in I.$$

Областью задания этого уравнения является $I \times G(J)$. Решения $z = \zeta(x)$ суть первообразные функции $f(x)$. Оговоримся, что решениями будут все первообразные, если $G(J) = \mathbb{R}$. Иначе

только те из них и на таких промежутках $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq I$, для которых $\zeta(x) \in G(J)$. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения $z' = f(x)$ очевидны, в итоге остается лишь вернуться к исходной переменной $y = G^{-1}(z)$. Условие $G(J) = \mathbb{R}$ определяется расходимостью интегралов

$$\int_c^{y_0} \frac{1}{g(y)} dy, \quad \int_{y_0}^d \frac{1}{g(y)} dy, \quad y_0 \in (c, d),$$

поскольку должно быть $G(c+0) = -\infty$, $G(d-0) = +\infty$.

В общем случае $g(y)$ может принимать нулевое значение на интервале J . Рассмотренная теория годится для подынтервалов между нулями функции $g(y)$. При $g(\bar{y}) = 0$ подстановка $y = \varphi(x) = \bar{y}$ в уравнение дает тождество по $x \in I$, так что нули \bar{y} определяют решения. При наличии нулей $g(y)$ могут появляться особые решения. «Склейка» и анализ общей картины требуют усилий. Как это часто бывает, легче формально проинтегрировать дифференциальное уравнение, чем разобраться затем в «переплетениях» и особенностях неявных функций, определяемых «явными» выражениями. Ограничимся приведенными основными сведениями, общая теория излагается в [3, 8, 16, 21, 27].

Мнемонические преобразования. При решении конкретных примеров (задач) повторять подробные рассуждения нерационально. Пользуются цепочкой формальных выкладок:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Можно добавить промежуточную запись $d(G(y) - F(x)) = 0$, где $G(y)$, $F(x)$ — любые первообразные функций $1/g(y)$, $f(x)$ (эти первообразные обозначаем как неопределенные интегралы). Обращаемся с символом производной как с дробью. Переносим «игреки» в одну сторону, «иксы» в другую и «интегрируем». Отсюда и название уравнения с разделяющимися переменными. Обоснование проводится в терминах дифференциалов, отношением которых и определяется производная. Дифференциальные уравнения естественно записывать в дифференциалах (тем более что часто они так и составляются в приложениях).

Метод интегрирования, основанный на записи дифференциального уравнения в форме $dU = 0$, где в данном случае $U(x, y) = G(y) - F(x)$, является достаточно универсальным (см. далее уравнения в полных дифференциалах). По правилу вычисления дифференциала функции двух переменных

$$dU = \partial_x U dx + \partial_y U dy = -f(x) dx + g^{-1}(y) dy,$$

так что уравнение $dU = 0$ эквивалентно исходному уравнению $y' = dy/dx = f(x)g(y)$ и тривиально интегрируется: $U(x, y) = C$.

Наряду с неопределенным интегралом можно оперировать понятием определенного интеграла. Производная y' представляется отношением дифференциалов dy/dx , и равенство $dy/g(y) = f(x) dx$ понимается с учетом поиска y как функции независимой переменной x (в классической постановке задачи):

$$g^{-1}(y) dy = g^{-1}(y(x))y'(x) dx = f(x) dx.$$

Поскольку $dx = \Delta x$ — произвольное приращение переменной x (лишь бы $x + \Delta x \in I$), то равны функции при dx . Интегрируем их в пределах от x_0 до x , переходя в интеграле от дроби $y'(x)/g(y(x))$ к переменной интегрирования y . Для краткости опускают среднее равенство и сразу пишут знаки интегралов. При этом получается неявное задание решения с начальными данными (x_0, y_0) , $y_0 = y(x_0)$. Если использовать символ неопределенного интеграла (произвольной фиксированной первообразной, заданной с точностью до аддитивной константы), то в формуле появляется C . Константу C затем при необходимости уточняют, задавая начальные данные или другие требуемые свойства решения, в том числе и асимптотического характера.

Геометрическая и механическая интерпретации. В общей теории ОДУ используется аппарат *дифференциальных форм*. Здесь приведем лишь наводящие соображения. Дифференциал dy определяется как линейная часть приращения функции:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad dy = A\Delta x,$$

где $o = \alpha(\Delta x)\Delta x$, $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ ($dx = \Delta x$). Подразумевается, что значения $y(x + \Delta x)$ определены для достаточно

малых Δx ($|\Delta x| < \varepsilon$). Не исключая $\Delta x = 0$, полагаем по непрерывности $\alpha(0) = 0$. Дифференциал dy можно рассматривать как линейное отображение $L: \Delta x \mapsto A\Delta x$ ($\Delta x \in \mathbb{R}$) или как значение $L(\Delta x)$ отображения на приращении Δx ($|\Delta x| < \varepsilon$). Первый вариант приводит к обобщению понятия производной для операторов. В \mathbb{R} производная как отображение отождествляется с числом A , которое обозначается $y'(x)$. В геометрической трактовке приращению $\Delta x \neq 0$ сопоставим вектор \vec{v} (отрезок со стрелкой) длины $|\Delta x|$, отложенный от точки x в положительном направлении оси Ox , если $\Delta x > 0$, и в отрицательном при $\Delta x < 0$ ($\Delta x = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$). Тогда dx, dy — линейные функции этого вектора, характеризующего изменение (смещение) независимой переменной: $dx(\vec{v}) = \Delta x$, $dy(\vec{v}) = A\Delta x$.

Обозначим $P(x, y) = -f(x)$, $Q(x, y) = 1/g(y)$. Тогда уравнение $y' = dy/dx = f(x)g(y)$ после подстановки решения $y(x)$ можно переписать в виде равенства $\Omega(\vec{v}) = \Omega(x, y; \vec{v}) = 0$, где

$$\Omega(x, y; \vec{v}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = P(x, y) dx(\vec{v}) + Q(x, y) dy(\vec{v}),$$

«силовое поле» \vec{F} имеет координаты P и Q , а $\vec{v} = (dx, dy)$ — касательный вектор к интегральной кривой на плоскости Oxy в точке $(x, y(x))$. В терминах аффинного пространства представляем себе точки (x, y) с приложенными к ним векторами $\vec{w} = (w_1, w_2)$ (с началом в (x, y)). В совокупности векторы \vec{w} , включая нулевой вектор $\vec{w} = 0 = (0, 0)$, образуют *касательное пространство* в точке (x, y) . Функции точки и вектора, линейные по вектору при фиксированной точке приложения, называются *дифференциальными 1-формами*. Дифференциальными, поскольку в приложениях имеются в виду касательные векторы скорости $\vec{w} = \vec{v} \neq 0$ движения вдоль гладких кривых, единица соответствует количеству векторных аргументов.

Величины dx, dy можно трактовать как линейные координатные функции приложенного к точке вектора: $dx(\vec{w}) = w_1$, $dy(\vec{w}) = w_2$. Для вектора \vec{w} , касательного к графику $\{(x, \varphi(x))\}$ ($\varphi \in C^1$), выполняется $w_1 = \Delta x$, $w_2 = A\Delta x$ ($A = \varphi'(x)$). Интегральной является гладкая кривая, вдоль которой дифференциальная 1-форма Ω обращается в нуль на касательных векторах.

Равенство $\Omega = 0$ означает ортогональность силового поля к интегральной кривой: $\vec{F} \perp \vec{v}$. Поскольку выполняется

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi = -(\partial_x \Pi, \partial_y \Pi) = (-f(x), g^{-1}(y)),$$

где $\Pi := -H = F(x) - G(y)$, то функция Π по определению является потенциалом силового поля. Следовательно, интегральные кривые ($H = C$) — эквипотенциальные линии $\Pi = \text{const}$. Итак, не только «законы природы пишутся на языке дифференциальных уравнений», но и для абстрактного уравнения (в данном случае $y' = f(x)g(y)$) можно при необходимости использовать естественнонаучную терминологию.

В дальнейшем кратком изложении уже не будем столь подробно комментировать каждый шаг и ограничимся в основном формальным сведением уравнений к уже рассмотренному типу.

Однородное уравнение. Пусть правая часть уравнения в нормальной форме представима функцией от дроби y/x :

$$y' = f(x, y) = g(y/x), \quad g \in C(z_1, z_2).$$

Такая запись предполагает $x \neq 0$. По заданным границам интервала (z_1, z_2) определяются два угла $z_1 < y/x < z_2$, которые считаем областями $G_{1,2}$ задания уравнения (пусть $x > 0$ в G_1). Выберем произвольную точку $(x, y) \in G_1 \cup G_2$. Тогда

$$(\lambda x, \lambda y) \in G_1 \cup G_2 \quad \forall \lambda \neq 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

По определению однородность степени m функции $f(x, y)$ означает $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$. В рассматриваемом случае $m = 0$. Тангенс угла наклона касательной не меняется вдоль лучей. Следовательно, интегральные кривые образуют семейство подобных кривых с центром подобия в начале координат.

Приступим к интегрированию однородного уравнения в квадратурах. Предположим, что $g(z) \neq z \quad \forall z \in (z_1, z_2)$, т. е. функция $g(z)$ не имеет неподвижной точки. Для определенности ограничимся областью G_1 . Сделаем замену переменных

$$(x, y) \mapsto (x, z), \quad z = y/x, \quad (x, y) \in G_1, \quad (x, z) \in (0, +\infty) \times (z_1, z_2),$$

и преобразуем уравнение: $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z \Rightarrow z'x = g(z) - z$. Для искомой функции $z = z(x)$ получили уравнение с разделяющимися переменными, которое интегрируется в квадратурах:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g(z) - z}{x}, \quad \frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{g(z) - z} = \ln x + C.$$

Второе равенство можно переписать в форме $d(\Phi(z) - \ln x) = 0$, где $\Phi(z)$ является первообразной функции $1/(g(z) - z)$ в интервале (z_1, z_2) , откуда и следует итоговая формула.

Аналогично рассматривается область G_2 , где $x < 0$. Следует только $\ln x$ заменить на $\ln|x|$. Объединяя оба случая, после потенцирования получаем *общий интеграл*

$$\exp\{\Phi(y/x)\} = Cx, \quad (x, y) \in G_1 \Rightarrow C > 0, \quad (x, y) \in G_2 \Rightarrow C < 0.$$

Здесь и в дальнейшем для произвольных постоянных стараемся не вводить новых обозначений, в частности $\exp C = C > 0$. Следует иметь в виду, что (*варьируемая*) константа C хоть и называется произвольной постоянной, но множество ее значений, определяющих неявно решения, не обязано совпадать с \mathbb{R} .

Функция $H(x, y) = x \exp\{-\Phi(y/x)\}$ является *интегралом* в областях G_1 и G_2 (сохраняет постоянное значение при подстановке решения $y = \varphi(x)$). Общий интеграл $H(x, y) = C$ ($C \neq 0$, точнее $\{C\} = \{H(x, y) \mid (x, y) \in G_1 \cup G_2\}$) позволяет искать решения ОДУ как неявные функции в форме $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ или $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на некоторых промежутках изменения принятой независимой переменной.

При решении задачи Коши отдельно рассматриваем области G_1 и G_2 , поскольку значение $x = 0$ исключается, а решения определяются на промежутках. Фиксируем произвольные начальные данные $(x_0, y_0) \in G_i$ и соответствующее значение $C = H(x_0, y_0)$. Тогда уравнение $H(x, y) = C$ определяет решение задачи Коши как неявную функцию $y = \varphi(x)$, определенную на некотором интервале, содержащем x_0 (достаточно убедиться в том, что $H'_y(x_0, y_0) \neq 0$). В каждой области G_i имеет место единственность решения задачи Коши. Изменение первообразной $\Phi(z)$ приведет лишь к корректировке константы C .

Если имеются неподвижные точки $g(z_*) = z_* \in (z_1, z_2)$, то лучи $y = z_*x$ ($x > 0$, $x < 0$) являются решениями, убеждаемся в этом подстановкой в уравнение. Общая картина поведения интегральных кривых может оказаться весьма сложной. Изложенное выше является лишь формальным переходом в раздел математического анализа под общим названием «неявные функции» (краеугольный камень нелинейного анализа).

Линейное уравнение. Линейность подразумевается по y :

$$y' = a(x)y + b(x), \quad x \in I = (\alpha, \beta), \quad a(\cdot), b(\cdot) \in C(I).$$

Если $b(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется *однородным*, иначе — *неоднородным*. Теорема о существовании, продолжимости и единственности решений задачи Коши для линейных уравнений и систем будет доказана в следующей главе. Здесь сосредоточимся на поиске явной формулы, представляющей все решения, которые подразумеваем полными (непродолжимыми).

Начнем с однородного уравнения $y' = a(x)y$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Проведем формальные преобразования:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad \frac{dy}{y} = a(x)dx \quad (y \neq 0), \quad d(\ln |y| - A(x)) = 0,$$

$$A(x) := \int a(x) dx, \quad \ln |y| = A(x) + C, \quad y = C \exp A(x) \quad (C \neq 0).$$

Получили семейство решений, что проверяется подстановкой в уравнение. Добавляя тривиальное решение $y \equiv 0$, имеем $C \in \mathbb{R}$. Начальные данные $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ однозначно определяют значение $C = y_0 \exp\{-A(x_0)\}$. Разным C соответствуют различные решения, которые определены на всем интервале I и имеют непересекающиеся интегральные кривые. Формула

$$y = C \exp A(x), \quad A(x) := \int a(x) dx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in I,$$

дает *общее решение* $y(x, C)$ однородного уравнения. Общее в том смысле, что при любом $C \in \mathbb{R}$ получаем решение (проверяется

подстановкой) и любое решение содержится в общем при подходящем выборе константы C . Решения понимаются полными. Без ссылки на главу II мы пока лишь показали, что любая задача Коши имеет единственное решение среди решений семейства.

Осторожность высказываний вызвана делением на y в процессе преобразований. Этой операции можно избежать. Используя множитель $\exp\{-A(x)\}$, перепишем уравнение в эквивалентной форме $(\exp\{-A(x)\}y)' = 0$, откуда $\exp\{-A(x)\}y = C$. Так что функция $y(x, C)$ действительно представляет все решения.

Перейдем к неоднородному линейному уравнению. Изложим несколько приемов интегрирования, накапливая их арсенал.

1°. Сделаем замену переменных

$$(x, y) \mapsto (x, z), \quad z = y - \exp A(x) \int \exp\{-A(x)\} b(x) dx.$$

Предостережение для начинающих: не вздумайте внешнюю экспоненту сократить с подынтегральной. Для новой искомой функции $z = z(x)$ подстановка в уравнение дает $z' = a(x)z$, так что *общим решением* является функция (двух переменных)

$$y(x, C) = \exp A(x) \left[C + \int \exp\{-A(x)\} b(x) dx \right].$$

Формула позволяет убедиться в существовании и продолжимости на I решений задачи Коши при любых начальных данных $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. В классе $y(x, C)$ имеем и единственность. Других решений нет, что нетрудно доказать от противного, поскольку разность двух решений на общем промежутке своего существования удовлетворяет линейному однородному уравнению. В таком кратком изложении замена переменных «угадана», перейдем к её конструктивному обоснованию.

2°. *Метод Лагранжа* (вариации произвольной постоянной). Далее уже не обсуждаем существование-продолжимость-единственность, а осваиваем формальные приемы интегрирования. Возьмем два произвольных решения $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, подставим в уравнение и вычтем из одного тождества другое. Разность $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ удовлетворяет однородному

уравнению $z' = a(x)z$, поэтому общее решение ищем в форме $y(x, C) = y_*(x) + C \exp A(x)$, где y_* — какое-либо фиксированное частное решение на интервале I . В порядке аналогии можно вспомнить структуру множества решений системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Следуя Лагранжу, ищем частное решение неоднородного уравнения в форме $y_*(x) = C(x) \exp A(x)$, где гладкую на интервале I функцию $C(x)$ попытаемся подобрать. Отсюда и название метода, поскольку постоянную в общем решении однородного уравнения заменили на функцию (варьируем C).

Подставим y_* в уравнение: $C' \exp A + Ca \exp A = aC \exp A + b$,

$$C' \exp A = b, \quad C(x) = \int \exp\{-A(x)\} b(x) dx.$$

Здесь фиксируем любую первообразную и не пишем аддитивную константу, поскольку искали одно частное решение. Итак,

$$y(x, C) = \int \exp\{-A(x)\} b(x) dx \cdot \exp A(x) + C \exp A(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

3°. *Метод Бернулли.* Излагаем конспективно, поскольку получим в третий раз одну и ту же формулу. Ищем решение в форме произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x), \quad u'v + uv' = auv + b, \quad (u' - au)v + uv' = b.$$

Выбором $u(x)$ обнулим скобку: $u(x) = \exp A(x)$. Тогда

$$v'(x) \exp A(x) = b(x), \quad v(x) = \int \exp\{-A(x)\} b(x) dx + C.$$

4°. *Интегрирующий множитель.* Домножим исходное линейное неоднородное уравнение на функцию $\exp\{-A(x)\}$:

$$\exp\{-A(x)\}y' - \exp\{-A(x)\}a(x)y = \exp\{-A(x)\}b(x).$$

Левая часть является производной от $\exp\{-A(x)\}y(x)$. Далее интегрируем обе части уравнения и получаем тот же результат $y(x, C)$. В силу эквивалентности всех преобразований здесь

можем утверждать, что других решений нет, и по праву назвать функцию $y(x, C)$ *общим решением* линейного уравнения.

Если задаться целью записать решение с помощью определенного интеграла и явно указать зависимость от начальных данных, то получим общее решение в *форме Коши*:

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 \exp\{A(x, x_0)\} + \int_{x_0}^x \exp\{A(x, t)\} b(t) dt,$$

$$A(x, x_0) := \int_{x_0}^x a(\tau) d\tau, \quad (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}, \quad C = y_0.$$

Уравнение Бернулли. Это дифференциальное уравнение

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad a(\cdot), b(\cdot) \in C(I), \quad I = (\alpha, \beta).$$

Считаем $b \not\equiv 0$, $m \neq 0$, $m \neq 1$, иначе оно линейное. Ограничимся $m \in \mathbb{N}$. Тривиальное решение $y \equiv 0$ очевидно. Для поиска решений, не обращающихся в нуль на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subseteq I$, поделим уравнение на y^m :

$$y'y^{-m} = [1 - m]^{-1} (y^{1-m})' = a(x)y^{1-m} + b(x).$$

Замена $z = y^{1-m}$ приводит уравнение к линейному неоднородному, которое интегрируется в квадратурах.

За внешней простотой такого преобразования скрываются существенные детали. В силу теоремы Пикара $\forall (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ существует решение задачи Коши, определенное на некотором интервале. Имеет место единственность в смысле равенства на пересечении промежутков определения. Если $y_0 \neq 0$, то решение не обращается в нуль в окрестности x_0 . Пока решение определено и $y(x) \neq 0$ правомерно рассматривать $z(x)$, в то время как линейное уравнение $z'/(1 - m) = a(x)z + b(x)$ обладает общим решением $z(x, C)$, определенным для всех $x \in I$ и $C \in \mathbb{R}$. Иными словами, искомые решения «содержатся» в формуле $y^{1-m} = z(x, C)$, требуется дополнительный анализ. Например, при $m = 3$ нужно следить за знаком функции $z(x, C)$, а при $m = 2$ уже для простейшего уравнения $y' = y^2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) решения непродолжимы на \mathbb{R} : $z = 1/y$, $z' = -1$, $z(x, C) = -x + C$

(ноль z обращает y в бесконечность). В принципе в качестве m можно рассматривать любое вещественное число ($\neq 0, 1$). Не исключено появление особых решений ($y' = y^m$, $m = 2/3$, $y \equiv 0$).

К уравнению Бернулли, естественно, применим и *метод Бернулли*. Ищем решение в форме произведения $y = u(x)v(x)$:

$$u'v + uv' = auv + bu^m v^m, \quad u'v + u[v' - av] = bu^m v^m.$$

Выбирая $v = \exp A$, $A(x) := \int a(x)dx$, чтобы $[...] = 0$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными для функции $u(x)$.

В порядке задачи для самостоятельного исследования рассмотрим модель движения центра масс ЛА (см. введение). Ограничимся уравнениями для скорости и угла к горизонту:

$$\dot{v} = -pv^2 - g \sin \theta, \quad v\dot{\theta} = -g \cos \theta, \quad p := cS\rho/(2m).$$

Условия полета ЛА считаем таковыми, что можно принять $p = \text{const}$. В частности, диапазон высот невелик и плотность атмосферы ρ практически постоянна. Обозначим $z = -g \sin \theta$. Монотонное убывание с течением времени угла $\theta(t)$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ позволяет принять z за новую переменную:

$$\dot{v} = -pv^2 + z, \quad v\dot{z} = g^2 - z^2 \Rightarrow \frac{dv}{dz} (g^2 - z^2) = -pv^3 + vz.$$

Положим теперь $u = 1/z$, выделив два этапа: $\theta(t) \in (0, \pi/2)$ — подъем, $\theta(t) \in (-\pi/2, 0)$ — спуск. В переменных u, v получаем уравнение Бернулли (с учетом $1 - u^2 g^2 < 0$):

$$\frac{dv}{du} + \frac{p}{1 - u^2 g^2} v^3 - \frac{1}{u(1 - u^2 g^2)} v = 0.$$

Уравнение Риккати. Правая часть квадратична по y :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad x \in I = (\alpha, \beta), \quad a, b, c \in C(I).$$

Подразумевается $a(x) \neq 0$, $c(x) \neq 0$. В общем случае уравнение не интегрируется в квадратурах, но если известно какое-либо

частное решение $y_*(x)$, то заменой $y = y_*(x) + z$ приходим к уравнению Бернулли для новой искомой функции $z(x)$:

$$z' = [2a(x)y_*(x) + b(x)]z + a(x)z^2.$$

Уравнение Риккати часто встречается в приложениях (когда «скорость пропорциональна произведению...»). В математической теории управления большую роль играет *матричное уравнение Риккати* [7], хотя сам Риккати (1676–1754), естественно, не имел представления о современной теории управления.

Уравнение в полных дифференциалах. Рассмотрим в области $I \times J = (a, b) \times (c, d)$ уравнение в симметричной форме:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad P, Q \in C(G), \quad G = I \times J.$$

Предполагаем, что одновременно P и Q в нуль не обращаются, так что в области G задано поле направлений и уравнение можно интерпретировать как пару уравнений в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (y = \varphi(x), \quad x = \psi(y)).$$

Уравнение приобретает указанный в заголовке титул, если существует дифференцируемая в G функция $u(x, y)$ из условия

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

В этом случае решения уравнения определяются соотношением $u(x, y) = C$ как неявные функции. Поскольку в силу единственности дифференциала как линейной формы от dx, dy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (P^2 + Q^2 \neq 0, \quad (x, y) \in G),$$

то $\forall (x_0, y_0) \in G$ выполнены условия теоремы о неявной функции и уравнение $u(x, y) = C$ при $C = u(x_0, y_0)$ определяет единственное решение задачи Коши в форме $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$. Функция $u(x, y)$ является интегралом в области G (постоянна

на интегральных кривых), а соотношение $u(x, y) = C$ — общим интегралом (содержит в неявной форме решения задачи Коши $\forall (x_0, y_0) \in G$). Остается выяснить условия существования функции $u(x, y)$ с указанными свойствами и построить её.

ТЕОРЕМА. Пусть $P, Q \in C^1(G)$, $G = I \times J$, $P^2 + Q^2 \neq 0$. Тогда для существования функции $u(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы в прямоугольнике G выполнялось равенство $\partial_y P = \partial_x Q$.

Доказательство. Необходимость следует из $\partial_x u = P$, $\partial_y u = Q$ и равенства смешанных производных $\partial_{xy}^2 u = \partial_{yx}^2 u$ (непрерывных в силу включения $P, Q \in C^1$). Остается доказать достаточность.

Пусть $\partial_y P = \partial_x Q$. Проведем формальные построения. Рассмотрим требуемое равенство $\partial_x u = P$. Ему удовлетворяет

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + w(y), \quad (x, y) \in G.$$

Здесь x_0 — произвольное фиксированное число из интервала I , $w(y)$ — дифференцируемая функция, которую уточним позже. По построению функция u дифференцируема (вспомним теоремы о дифференцируемости по переменному верхнему пределу и параметру под знаком интеграла).

Теперь рассмотрим оставшееся требование $\partial_y u = Q$:

$$\begin{aligned} \partial_y u(x, y) &= \int_{x_0}^x \partial_y P(x, y) dx + w'(y) = \\ &= \int_{x_0}^x \partial_x Q(x, y) dx + w'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + w'(y). \end{aligned}$$

Здесь мы также воспользовались возможностью дифференцирования по параметру под знаком интеграла (в силу $P \in C^1$) и заменой $\partial_y P$ на $\partial_x Q$. Условие $\partial_y u = Q$ приводит к уравнению $w'(y) = Q(x_0, y)$ ($y \in J$), которое имеет решение в форме первообразной: $w(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$, $y_0 \in J$. Окончательно получаем

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

По построению функция дифференцируема (и даже непрерывно), причем $\partial_x u = P$, $\partial_y u = Q$, т. е. $du = P dx + Q dy$. Тогда уравнение $P dx + Q dy = 0$ записывается в форме $du = 0$, откуда получаем общий интеграл $u(x, y) = C$. Условие $P^2 + Q^2 \neq 0$ гарантирует единственность решения задачи Коши как неявной функции $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$ из $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Другие такие функции u отличаются от построенной на константу. \square

Отметим, что исходное дифференциальное уравнение эквивалентно соотношению $u(x, y) = C$ и в общем случае интегральную кривую можно искать в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \neq 0, \quad u(\varphi(t), \psi(t)) \equiv C, \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle.$$

Теорема останется в силе, если вместо прямоугольника рассматривать *односвязную* область G , иначе гарантируется лишь необходимость. Образно говоря, не должно быть «дыр» (в G замкнутый контур «стягивается» в точку). В этом случае задача построения функции $u(x, y)$ решается с помощью криволинейного интеграла, который в силу условия $\partial_y P = \partial_x Q$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего заданные точки.

Может оказаться, что уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, но становится таковым при умножении на *интегрирующий множитель* $\mu(x, y) \neq 0$. Критерий $\partial_y(\mu P) = \partial_x(\mu Q)$ в предположениях гладкости функций μ, P, Q приводит к линейному уравнению в частных производных относительно μ . В общем случае его решение не менее сложная задача. В окрестности неособой точки ($P^2 + Q^2 \neq 0$) интегрирующий множитель существует, и в этом смысле рассматриваемый тип уравнений является общим. Достаточно подробно теория интегрирующего множителя изложена, например, в [16, 27].

Если присмотримся к выкладкам при интегрировании уравнений рассмотренных типов, то заметим активное использование интегрирующих множителей. Так что деление уравнений на типы условно, методы интегрирования могут быть различными. Кроме того, в литературе одни и те же термины иногда несколько отличаются по содержанию, поэтому нелишне уточнять, что, например, понимается под общим и даже частным решением.

3. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Приведем геометрическую трактовку пройденного материала, используя при этом механическую и гидродинамическую терминологию. Основные понятия и определения обобщаются на n -мерный случай [19], но в контексте главы I будем придерживаться плоскости. Если читателя интересуют формальные методы интегрирования ОДУ, то параграф можно пропустить.

Плоскость воспринимаем как аффинное (точечно-векторное) евклидово пространство E^2 . Его элементами являются точки, каждая пара точек p, q определяет вектор \vec{pq} (из p в q , его можно обозначать разностью $q - p$), в линейном (ассоциированном) пространстве векторов определено скалярное произведение. Фиксируем точку O и ортонормированный базис векторов $e_{1,2}$. Соответствующие прямоугольные декартовы координаты точек p на плоскости обозначаем (x, y) : $\vec{Op} = xe_1 + ye_2$. Векторы и точки отождествляем с упорядоченными наборами их координат: $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 \equiv (v_1, v_2)$, $p \equiv (x, y)$. Чтобы формально подчеркнуть различие точек и векторов, используем разные обозначения: $\{p = (x, y)\} = \mathbb{R}^2$, $\{\vec{v} = (v_1, v_2)\} = \mathbb{R}^2$. В координатах скалярное произведение и длина записываются стандартно:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2, \quad |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Евклидово расстояние $\rho(p, q)$ между точками определяется как $\rho(p, q) = |\vec{pq}|$, $\rho^2(p, q) = \vec{pq} \cdot \vec{pq}$.

Векторные поля и гладкие кривые. Начнем с формального определения. *Вектор в точке p* с координатами (x, y) есть пара $\mathbf{v} = (p; \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (рис. 3.1). Для упрощения обозначений стрелочки опускаем: $\mathbf{v} = \vec{v}$. Наглядно \mathbf{v} представляется как направленный отрезок \mathbf{v} , приложенный к p . Это присуще, например, силе, которая характеризуется не только векторной частью (величиной и направлением), но и точкой приложения. Векторы в точке p образуют векторное (линейное) пространство \mathbb{R}_p^2 со сложением и умножением на скаляр по правилам

$$(p; \mathbf{v}) + (p; \mathbf{w}) = (p; \mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad \lambda(p; \mathbf{v}) = (p; \lambda\mathbf{v}).$$

Сложение векторов в различных точках не определено (как для сил в общем случае). Скалярное произведение определяется как

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (p; \mathbf{v}) \cdot (p; \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Длина вектора $\mathbf{v} = (p; \mathbf{v}) \in \mathbb{R}_p^2$ есть величина $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v \cdot v} = |v|$, а угол между двумя векторами в точке p ненулевой длины $\mathbf{v} = (p; \mathbf{v})$ и $\mathbf{w} = (p; \mathbf{w})$ — это число $\theta \in [0, \pi]$, для которого $\cos \theta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle / (|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|)$. Векторное поле \mathbf{V} в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (с метрикой ρ) есть отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in G$ некоторый вектор в этой точке $\mathbf{V}(p) = (p; \mathbf{v}(p))$, где $v: G \rightarrow \mathbb{R}^2$. В дальнейшем обычно считаем, что $v \in C^1(G)$ (компоненты $v_{1,2}$ непрерывно дифференцируемы как функции координат $(x, y) \equiv p \in G$), т. е. векторное поле \mathbf{V} гладкое.

Пример. Дифференцируемой функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, сопоставляется векторное поле её градиента:

$$(\nabla f)(p) = (p; \text{grad } f(p)), \quad \text{grad } f(p) = (\partial_x f(p), \partial_y f(p)).$$

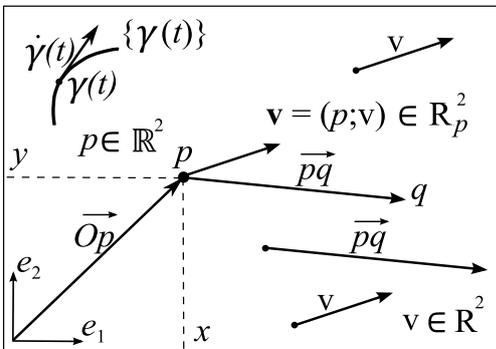


Рис. 3.1. Векторы в точке

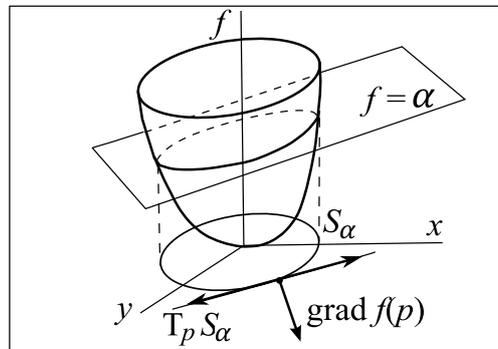


Рис. 3.2. Поверхности уровня

Замечание 2. С точки зрения тензорного анализа ∇f является не векторным, а ковекторным полем: его компоненты при допустимой замене координат преобразуются иначе, чем компоненты вектора скорости движения вдоль гладкой кривой [19]. При наличии скалярного произведения градиент можно определить как вектор, представляющий линейную часть приращения

$f(p+h) - f(p)$ в форме $\langle \text{grad } f(p), h \rangle$ ($h \in \mathbb{R}^2, |h| < \varepsilon$). Поскольку в дальнейшем достаточно ограничиться фиксированными прямоугольными декартовыми координатами, то градиент считаем вектором с компонентами из частных производных.

Явное указание точки приложения p усложняет обозначения, поэтому удобно следить только за векторной частью $v(p)$ поля $\mathbf{V}(p)$, полагая, что p известна по контексту. Иными словами, считаем, что в самом обозначении $v(p)$ содержится указание точки приложения и можно отождествить $\mathbf{v} = (p; v) \equiv v(p)$.

Продолжим определения. *Параметризованная гладкая кривая* в области G — это отображение

$$\gamma: I \rightarrow G, \quad I = (t_1, t_2), \quad \gamma \in C^1(I).$$

Независимую переменную t ($t \in I \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in G$) интерпретируем как время движения. В дальнейшем предполагаем выполненным условие *регулярности*: вектор скорости $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ ненулевой $\forall t \in I$ (этот *касательный вектор* приложен к точке $p = \gamma(t)$). Регулярность гарантирует, что каждая точка *носителя* кривой $\{\gamma(t) | t \in I\} \subset G$ лежит на его части, которая в декартовых координатах (x, y) может быть представлена графиком гладкой функции $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$ на некотором интервале изменения аргумента. Если, например, $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$, то локально $t = t(x)$ и $y = \gamma_2(t) = \varphi(x)$. Носитель гладкой регулярной параметризованной кривой кратко будем называть гладкой кривой в G и обозначать той же буквой γ (но уже без указания параметра t). При необходимости вместо интервала $I = (t_1, t_2)$ можно рассматривать промежуток $\langle t_1, t_2 \rangle$, в том числе отрезок $\bar{I} = [t_1, t_2]$, с оговоркой об односторонних производных. Длина кривой γ не зависит от параметризации указанного класса и определяется как

$$\ell(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (t \in \bar{I}).$$

Если допускать открытые интервалы, в частности $I = \mathbb{R}$, то не исключается $\ell(\gamma) = +\infty$. Ортогональность гладких кривых

в точке пересечения означает ортогональность касательных векторов. Понятие скалярного произведения касательных векторов лежит в основе дифференциальной геометрии.

Поверхности уровня и касательное пространство. Пусть функция f определена в области (открытое связное множество) $G \subseteq \mathbb{R}^2 = Oxy$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. Ограничимся гладкими f класса C^1 . Свойства функции тесно связаны с геометрическими характеристиками её *множеств уровня* (рис. 3.2)

$$S_\alpha = f^{-1}(\alpha) = \{(x, y) \in G \mid f(x, y) = \alpha\}.$$

Число α называется *высотой* множества уровня: S_α при $\alpha > 0$ состоит из таких точек области G , над которыми график

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

находится на расстоянии α . При $\alpha < 0$ «над» меняется на «под». Подобно тому как топографическая карта дает картину рельефа местности, так и множества уровня описывают график функции. Рассматриваем только те высоты α , для которых $S_\alpha \neq \emptyset$. Точка $p_0 = (x_0, y_0) \in S_\alpha$ называется *неособой* точкой множества уровня S_α , если выполнено $\text{grad } f(p_0) \neq 0 = (0, 0)$, в противном случае p_0 *особая*. Объекты с нулевыми координатами обозначаем одним символом 0 . Если $\text{grad } f(p_0) \neq 0$ на S_α , то по теореме о неявной функции локально множество уровня представимо графиком гладкой функции $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$. Тогда в случае связности S_α можно говорить о гладкой линии уровня (поверхности в $G \subseteq \mathbb{R}^n$ при $n = 3$, гиперповерхности при $n > 3$). В общем случае рассматриваем компоненты связности S_α .

Пусть p_0 — неособая точка S_α . Вектор $v \neq 0$, приложенный к точке p_0 (формально речь идет о паре $\mathbf{v} = (p_0; v)$), называется *касательным* к S_α в точке p_0 , если существует такая гладкая параметризованная регулярная кривая $t \mapsto \gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$), что

$$\gamma(0) = p_0, \quad \dot{\gamma}(0) = v, \quad \gamma = \{\gamma(t) : |t| < \varepsilon\} \subseteq S_\alpha.$$

Такие векторы вместе с нулем образуют *касательное пространство* $T_{p_0}S_\alpha$ к множеству уровня S_α в точке p_0 . На плоскости

$(p_0 \in S_\alpha \subset G \subseteq \mathbb{R}^2)$ это касательная прямая, а если, например, S_α — сфера в \mathbb{R}^n , то касательная гиперплоскость. Неформально представляем себе движение вдоль гладкой кривой на поверхности. Скорость движения характеризуем тремя параметрами: текущим положением, направлением и величиной. Эту информацию записываем как $\mathbf{v} = (p; \mathbf{v})$. Для сокращения письма опускаем указание точки p , если она подразумевается по контексту.

В неособой точке $p_0 \in S_\alpha$ вектор $\text{grad } f(p_0)$ ортогонален S_α :

$$\text{grad } f(p_0) \perp \mathbf{v}, \quad \langle \text{grad } f(p_0), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in T_{p_0} S_\alpha$$

(при фиксированной точке p_0 полагаем $\mathbf{v} = \mathbf{v}$). Действительно, поскольку выполняется тождество $f(\gamma(t)) \equiv \alpha = \text{const}$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t)) = \langle \text{grad } f(p_0), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Вычислим теперь производную по направлению:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(p_0 + th) = \langle \text{grad } f(p_0), h \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^2, \quad |h| = 1.$$

Следовательно, по нормали $h = \text{grad } f(p_0) / |\text{grad } f(p_0)|$ к множеству уровня S_α функция f растёт наискорейшим образом.

Здесь в аффинной (точечно-векторной) терминологии p_0 и $p_0 + th$ — точки, а h и th ($|t| < \varepsilon$) — векторы, приложенные к p_0 .

Градиентные векторные поля. В гидродинамической терминологии векторное поле удобно интерпретировать как поле скоростей установившегося потока жидкости. При фиксированной или известной по контексту точке $p \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ оперируем только векторной составляющей поля $\mathbf{v}(p) \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{v}_{1,2} \in C^1(G)$). С каждым таким полем ассоциируются *линии тока*. Пусть особых точек нет: $\mathbf{v} \neq 0 = (0, 0) \quad \forall p \in G$. *Интегральная кривая* поля \mathbf{v} — это параметризованная кривая $t \mapsto \gamma(t)$ (указанного выше класса), вдоль которой выполняется равенство $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$, $t \in I = (t_1, t_2)$. Касательные векторы скорости являются векторами поля (в точках $\gamma(t)$). Геометрический образ параметризованной кривой (её носитель $\gamma = \{\gamma(t)\} \subset G$) называется траекторией движения $t \mapsto \gamma(t)$ и является аналогом линии тока.

Пусть поле градиентно: $v(p) = \text{grad } f(p)$, $f \in C^1(G)$. Такое поле сил называется *потенциальным*. Чтобы не отступать от предположения C^1 -гладкости поля, считаем $f \in C^2(G)$. Рассмотрим произвольную интегральную кривую $t \mapsto \gamma(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \langle \text{grad } f, v \rangle = |\text{grad } f|^2 > 0$$

и потенциал $-f(p)$ строго монотонно убывает вдоль траектории γ с ростом времени t . В случае самопересечения получалась бы замкнутая траектория — *цикл*. Пересечение «под углом» невозможно, так как вектор v касательный. В градиентном поле циклы отсутствуют, поскольку $f(\gamma(t))$ строго монотонно растет.

В более общем случае точка $p_0 \in G$ называется *неособой точкой векторного поля* v , если вектор-функция $v(p)$ непрерывна в окрестности p_0 и $v(p_0) \neq 0$. Здесь $0 = (0, 0)$, нули линейных пространств принято обозначать одним символом. В предположении $v \in C^1$ остается $v(p_0) \neq 0$. *Особые точки* являются *нулями поля*, в них не определено направление вектора v .

Дифференциальные уравнения. Поставим следующий вопрос. Как найти интегральные кривые и траектории движения (линии тока) гладкого поля $v = v(p)$? Так как $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$, то движение $t \mapsto \gamma(t)$, $t \in I = (t_1, t_2)$, является *решением* системы

$$\dot{x} = v_1(x, y), \quad \dot{y} = v_2(x, y), \quad (x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2,$$

а $\gamma = \{\gamma(t) | t \in I\}$ — *фазовой кривой*. Особые точки векторного поля ($v(\bar{p}) = 0$) — *положения равновесия*: фазовая скорость равна нулю, отображение $t \mapsto \bar{p}$ ($t \in \mathbb{R}$) является решением, а сама точка \bar{p} — фазовой кривой. Положения равновесия заслуживают пристального изучения, в их окрестности (гладкое) поле может резко менять направление. В области G их может и не быть, а для дифференциальных уравнений на поверхностях (гладких многообразиях) их существование может оказаться неизбежным (например, на двумерной сфере) [2, 19].

В § 2 рассматривалось уравнение в симметричной форме:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad P, Q \in C^1(G).$$

Его «коэффициенты» P, Q определяют в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$ гладкое векторное поле $v(p) = (v_1, v_2) = (P, Q)$, $p = (x, y)$. Положения равновесия соответствуют особым точкам ($P = Q = 0$), в которых не задано поле направлений. Определим теперь сопряженное к v поле $w = (-Q, P)$, которое ортогонально v : $\langle v, w \rangle = -PQ + QP = 0$. Если $t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ гладкая кривая, являющаяся решением уравнения $\dot{p} = w(p)$ (системы скалярных уравнений $\dot{x} = -Q, \dot{y} = P$), то по определению

$$\dot{\varphi}(t) = -Q(\varphi(t), \psi(t)), \quad \dot{\psi}(t) = P(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I.$$

В моменты времени t , когда $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, разделим второе уравнение на первое (левую часть на $\dot{\varphi}$, правую на $-Q$, $\dot{\varphi} = -Q$) и преобразуем равенство дробей:

$$P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t) = 0.$$

Точно такое же равенство получаем при $\dot{\psi}(t) \neq 0$. Значит, это тождество по $t \in I$ в силу условия регулярности гладкой кривой $\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \neq 0 \forall t \in I$. Именно так и определялась интегральная кривая в параметрической форме для уравнения $P dx + Q dy = 0$.

Пусть G — прямоугольник $\Pi = (a, b) \times (c, d)$ и гладкое поле $v = (P, Q)$ градиентно: $v = \text{grad } f$, $f \in C^2(\Pi)$. Тогда

$$df(x, y) = \partial_x f dx + \partial_y f dy = P dx + Q dy$$

и уравнение $P dx + Q dy = 0$ переписывается как $df(x, y) = 0$, откуда $f(x, y) = C$. Следовательно, f — интеграл, линии уровня которого состоят из интегральных кривых, если только избегать особых точек поля. Уточним формулировку. Задаем произвольные начальные данные $(x_0, y_0) \in \Pi$. Пусть эта точка неособая: $v(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ определяет единственное решение задачи Коши в форме $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$ на некотором интервале аргумента. Вопрос о продолжимости требует отдельного изучения. Особым точкам соответствуют положения равновесия уравнения $\dot{p} = v(p)$. В §2 уравнение $P dx + Q dy = 0$

с градиентным полем $v = (P, Q)$ называлось уравнением в полных дифференциалах, причем $u(x, y) = f(x, y) + c$ с точностью до аддитивной константы. Необходимое и достаточное условие существования потенциала: $\partial_y P = \partial_x Q$. Ограничение $G = \Pi$ можно ослабить, заменив прямоугольник *односвязной* областью G (без «дыр»). Иначе гарантируется лишь необходимость. Что касается терминологии, то в механике в случае поля силы говорят о потенциале $-f$, а, например, в гидродинамике, когда v — поле скоростей частиц жидкости, потенциалом называют функцию f . О потенциалах, изучаемых в *термодинамике*, лишь упомянем.

Приложения. Приведем гидродинамическую интерпретацию. Пусть $v = (P, Q)$ — поле скоростей плоского установившегося течения жидкости, а $w = (-Q, P)$ — сопряженное поле в рассматриваемом прямоугольнике $G = \Pi$. Условие потенциальности v ($\partial_y P = \partial_x Q$, f — потенциал скорости) вследствие известной из курса математического анализа формулы Грина

$$\oint P dx + Q dy = \iint (\partial_y P - \partial_x Q) dx dy$$

означает равенство нулю *циркуляции скорости* вдоль замкнутого контура (поле v *безвихревое*). Потенциал g сопряженного поля w (когда $\partial_x P = -\partial_y Q$) называется *функцией тока*, причем выполняется следующее эквивалентное соотношение:

$$-\partial_y Q = \partial_x P \Leftrightarrow \operatorname{div}(v) \equiv \partial_x P + \partial_y Q = 0.$$

В подобных случаях знак тождества \equiv имеет смысл равенства по определению. Равенство нулю *дивергенции* поля v характеризует несжимаемость жидкости. Соотношения между потенциалами

$$\partial_x f = \partial_y g (= P), \quad \partial_y f = -\partial_x g (= Q)$$

являются *условиями Коши–Римана*: функция $f + ig$ комплексно аналитическая. Этим объясняется широкое применение комплексного анализа в плоских задачах гидродинамики. Заметим также, что функции f и g удовлетворяют *уравнению Лапласа*

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Pi,$$

т. е. являются *гармоническими*. Оператор Лапласа Δ — один из самых востребованных в математической физике.

Другой пример: рассмотрим экстремальную задачу

$$f \rightarrow \min, \quad (x, y) \in G, \quad f \in C^1(G).$$

Решения (если они есть) находятся среди стационарных точек. Антиградиент $-\text{grad } f \neq 0$ указывает направление, вдоль которого функция убывает наискорейшим образом: достигается минимум производной по направлениям $h \in \mathbb{R}^2$, $|h| = 1$. Если $\text{grad } f = 0$, то уже находимся в стационарной точке. Естественно рассмотреть градиентное поле $v(p) = -\text{grad } f(p)$ в области G и векторное дифференциальное уравнение $\dot{p} = v(p)$. При определенных ограничениях движение вдоль траектории приводит к решению исходной задачи оптимизации.

Дифференциальные 1-формы. Определим в каждой точке области $G \subseteq \mathbb{R}^2$ *касательное пространство*. Возьмем гладкую кривую $t \mapsto \gamma(t) \in G$ ($|t| < \varepsilon$, $\gamma(0) = p$) и вычислим касательный вектор скорости $v = \dot{\gamma}(0) \neq 0 = (0, 0)$. Объединение всех таких v с нулем обозначим $T_p G = \mathbb{R}^2$ и воспринимаем это множество векторов, прикрепленных к точке p , как касательное пространство. Более формально $T_p G = \{(p; v) \mid v \in \mathbb{R}^2\}$. Объединяя, получаем *касательное расслоение* $\bigcup T_p G = G \times \mathbb{R}^2$.

Дифференциальной 1-формой (или просто 1-формой) называется функция $\omega: G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которая при фиксированной $p \in G$ является линейной функцией касательных векторов, т. е. их векторных составляющих $v \in \mathbb{R}^2$. Приведем примеры.

1°. Пусть $w(p)$ — векторное поле в области G . Тогда *двойственная* к $w(p)$ 1-форма определяется следующим образом:

$$w(p, v) = \langle w(p), v \rangle, \quad p \in G \subseteq \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

2°. Для гладкой функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ определим

$$df: G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(p, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(p(t)) = \langle \text{grad } f(p), v \rangle,$$

где $p(0) = p$, $\dot{p}(0) = v$. Такая 1-форма $\omega = df$ называется дифференциалом функции f . В скалярном случае $dy(x) = y'(x)\Delta x$ —

функция точки x и приращения Δx , которое с учетом знака можно считать вектором смещения, отложенным от точки x .

3°. Определим обычным образом координатные функции

$$x: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(\bar{p}) = \bar{x}, \quad y: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(\bar{p}) = \bar{y}, \quad \bar{p} = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Тогда 1-формы dx , dy просто выделяют первую и вторую компоненты касательного вектора $v = (v_1, v_2)$:

$$dx(p, v) = \langle \text{grad } x, v \rangle = v_1, \quad dy(p, v) = \langle \text{grad } y, v \rangle = v_2.$$

Чтобы не усложнять обозначения, часто используют одни и те же символы для разных объектов («отождествляя» их). Выше x , y и координаты точки; и функции $x(t)$, $y(t)$; и отображения $G \rightarrow \mathbb{R}$. Дифференциал можем записать в привычной форме

$$\begin{aligned} df(p, v) &= \langle \text{grad } f(p), v \rangle = \partial_x f(p) v_1 + \partial_y f(p) v_2 = \\ &= \partial_x f(p) dx(v) + \partial_y f(p) dy(v), \quad p \in G, \quad v \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

или кратко $df = \partial_x f(p) dx + \partial_y f(p) dy = f'_x(p) dx + f'_y(p) dy$.

Вернемся к дифференциальному уравнению

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (x, y) \in G, \quad P, Q \in C^1(G).$$

Воспринимаем левую часть как дифференциальную 1-форму:

$$\omega(p, v) = P(p) dx(v) + Q(p) dy(v), \quad p \in G, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

Это двойственная к полю $w(p) = (P, Q)$ 1-форма, так как $\omega(p, v) = \langle w(p), v \rangle$. Интегральной линией является кривая

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (\varphi(t), \psi(t)) \in G, \quad t \in I = (t_1, t_2),$$

с ненулевым вектором скорости $v = (\dot{\varphi}, \dot{\psi})$, вдоль которой $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \omega(p(t), v(t)) &= (P, Q) \cdot (\dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \\ &= P(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\psi}(t) = 0, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Форма, которая является дифференциалом гладкой функции f , называется *точной*. Если $G = \Pi = (a, b) \times (c, d)$ (или область G односвязна), то критерий точности известен: $\partial_y P = \partial_x Q$.

Интеграл от дифференциальной формы ω вдоль гладкой кривой $t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (t_1, t_2)$, определяется как

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\gamma(t), \mathbf{v}(t)) dt, \quad \mathbf{v}(t) \equiv \dot{\gamma}(t).$$

Интеграл от точной формы вдоль замкнутого контура равен нулю в силу независимости от пути интегрирования:

$$\int_{\gamma} df = \int_{\alpha}^{\beta} df(\gamma(t), \mathbf{v}(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

Если пару функций (P, Q) интерпретировать как заданное векторное поле силы F , то в терминах криволинейных интегралов получаем

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} F \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\gamma} F \cdot dr, \quad dr \equiv (\dot{\varphi} dt, \dot{\psi} dt).$$

Это работа силового поля вдоль пути γ . Если работа вдоль любого (гладкого) замкнутого контура нулевая, то силовое поле потенциально: $F = -\text{grad } f$ ($\partial_y P = \partial_x Q$ в прямоугольнике Π).

4. УРАВНЕНИЯ $F(x, y, y') = 0$,

НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Перейдем к изучению дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad F: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3, \quad F \in C^1(D). \quad (4.1)$$

В $\mathbb{R}^3 \equiv E^3$ рассматриваем прямоугольную декартову систему координат (x, y, p) . Более привычным является обозначение (x, y, z) , но в контексте представленного ниже метода введения параметра $p = y'$ обозначение $z = p$ более употребительно. В рамках общей теории множество D считаем областью.

Уравнение $F(x, y, p) = 0$ определяет подмножество S области D . Чтобы избежать вырождений, будем предполагать $S \neq \emptyset$ и $\text{grad } F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_p F) = (F'_x, F'_y, F'_p) \neq 0$ на S . При необходимости различать вектор-строки и вектор-столбцы градиент обычно записывают столбцом. При условии $\text{grad } F \neq 0$ множество S будет гладкой поверхностью, заданной неявно. Пусть

$$(x_0, y_0, p_0) \in S \quad (F(x_0, y_0, p_0) = 0), \quad F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции найдется прямоугольник

$$\Pi: |x - x_0| < \varepsilon_1, \quad |y - y_0| < \varepsilon_2, \quad |p - p_0| < \varepsilon_3, \quad \Pi \subseteq D,$$

и функция $f: U_{\varepsilon_1}(x_0) \times U_{\varepsilon_2}(y_0) \rightarrow U_{\varepsilon_3}(p_0)$ (U_ε — ε -окрестность) класса C^1 , для которой выполняется тождество

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, \quad (x, y) \in W = U_{\varepsilon_1}(x_0) \times U_{\varepsilon_2}(y_0).$$

При этом имеет место единственность в смысле

$$(x, y, p) \in \Pi, \quad F = 0 \quad [(x, y, p) \in S \cap \Pi] \Leftrightarrow p = f(x, y).$$

Кратко говорят, что существует окрестность точки (x_0, y_0, p_0) , в которой уравнение $F(x, y, p) = 0$ однозначно разрешимо относительно p : $p = f(x, y)$, $p_0 = f(x_0, y_0)$, $f \in C^1(W)$.

Аналогичным образом рассуждаем, когда $F'_x(x_0, y_0, p_0) \neq 0$ или $F'_y(x_0, y_0, p_0) \neq 0$. Локально множество S гладким образом задается в явном виде $p = p(x, y)$ или $x = x(y, p)$, $y = y(x, p)$. Иными словами, S — двумерное C^1 -многообразие.

Функция $y = \varphi(x)$ ($x \in I = (a, b)$, $\varphi \in C^1(I)$) является решением уравнения (4.1), если $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \forall x \in I$. При необходимости в конкретной задаче можно ослабить ограничения: не обязательно D область и функции F , φ класса C^1 (но $\varphi' \exists \forall x \in \langle a, b \rangle$). В общем случае это может привести к сюрпризам, в том числе и топологического характера, поэтому, не преследуя цель «предельной» общности, всегда будем предполагать как минимум C^1 -гладкость и решения рассматривать на интервалах (не привлекая односторонние производные).

Задача Коши. Перейдем к постановке начальной задачи. Для уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$ требовалось по начальным данным (x_0, y_0) найти решение $y = \varphi(x)$ ($x \in I$) из условия $\varphi(x_0) = y_0$. В геометрических терминах: найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку. Простейший пример $y'^2 = 1$ показывает, что данных (x_0, y_0) для однозначного определения решения уравнения (4.1) недостаточно: $y = \pm x + C$, через каждую точку \mathbb{R}^2 проходят две прямые.

Для уравнения, не разрешенного относительно производной, задача Коши рассматривается в следующей постановке. задается точка $(x_0, y_0, p_0) \in S$ и требуется найти решение из условий $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = p_0$. Интегральная кривая $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}$ должна проходить через заданную точку (x_0, y_0) с заданным наклоном касательной ($\operatorname{tg} \alpha = p_0$). В связи с этим удобно рассматривать графики в расширенном пространстве $\{(x, y, p)\}$:

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x), p(x)) \mid p(x) = \varphi'(x), x \in I = (a, b)\}.$$

Интегральные кривые в таком расширенном смысле лежат на поверхности $S \subset D \subseteq \mathbb{R}^3$, где $F = 0$. В общей теории уже не обойтись без дифференциальной геометрии и топологии.

Для уравнения $F(x, y, y') = 0$ слишком ограничительно рассматривать решения в явной форме $y = \varphi(x)$. Расширим понятие решения до параметрически заданного:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I = (t_1, t_2), \quad \varphi, \psi \in C^1(I).$$

Помимо непрерывной дифференцируемости параметризованной кривой предполагаем регулярность: $v(t) \equiv (\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)) \neq 0, t \in I$.

Гладкая (параметризованная) кривая $t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ как отображение является решением уравнения (4.1), если

$$F(\varphi(t), \psi(t), \dot{\psi}(t)/\dot{\varphi}(t)) = 0 \quad \forall t \in I,$$

поскольку $y' = dy/dx = (y' dt)/(\dot{x} dt) = \dot{\psi}(t)/\dot{\varphi}(t)$. При этом естественно предполагается, что векторный аргумент функции F не выходит за пределы области D задания уравнения. В частности, использование обозначения y' неявно сужает класс допустимых

кривых: $\dot{\varphi}(t) \neq 0 \forall t \in I$. Обычно, исходя из специфики конкретной задачи, допустимо рассматривать не только уравнение в форме (4.1), но и «согласованные» с ним уравнения

$$F_1(x, y, x'_y) = 0, \quad F_2(x, y, dx, dy) = 0.$$

В первое из них можно подставлять $x'_y = \dot{\varphi}(t)/\dot{\psi}(t)$ (когда $\dot{\psi}(t) \neq 0$), а во второе — $dx = \dot{\varphi}(t) dt$, $y = \dot{\psi}(t) dt$, предполагая дальнейшее сокращение приращения dt независимой переменной. В общем случае трудно предусмотреть все варианты.

Наиболее употребительным является выбор параметра кривой $t = y'$ (см. далее), но пока вернемся к исходному уравнению (4.1), ограничиваясь решениями в форме зависимости $y = \varphi(x)$.

Единственность. Рассмотрим сначала уравнение в нормальной форме $y' = f(x, y)$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. Как минимум предполагаем непрерывность функции f в области G . Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется *неособой*, если через каждую точку некоторой её окрестности $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая $\gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x))\} \subset G$. Остальные точки считаются *особыми*. Если интегральная кривая целиком состоит из особых точек, то соответствующее решение называется *особым*.

«Прохождение» интегральной кривой через точку (\bar{x}, \bar{y}) означает, что соответствующее решение $y = \varphi(x)$ с начальным условием $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$ определено в некоторой окрестности \bar{x} . Включение $f \in C(G)$ гарантирует для любых начальных данных существование решения задачи Коши, определенного на некотором интервале (теорема Пеано). Требование единственности понимается локально: две интегральные кривые, проходящие через точку (\bar{x}, \bar{y}) , совпадают в достаточно малой её окрестности. Можно иметь в виду ε -окрестности: $U_{\varepsilon_1}(\bar{x})$, $U_{\varepsilon_2}((\bar{x}, \bar{y}))$ ($\exists \varepsilon_i > 0$). Если локальная единственность имеет место для любых начальных данных из области G (например, в условиях теоремы Пикара $f, f'_y \in C$), то формулировку можно усилить: решения $y = \varphi_{1,2}(x)$, равные при некотором значении \tilde{x} , совпадут на пересечении промежутков определения. Объединение этих промежутков и процедура продолжения («склеивания») дают максимальный интервал существования (полного) решения.

Перефразируем определения для уравнения $F(x, y, y') = 0$. Точка $M_0 = (x_0, y_0, p_0) \in S$ ($F = 0$) называется *неособой*, если через каждую точку $M = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ некоторой её окрестности U_S на поверхности S проходит единственная интегральная кривая

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \mid x \in U_\varepsilon(\bar{x})\} \subset S.$$

Уточним терминологию. Под окрестностью точки на S понимается пересечение окрестности этой точки в \mathbb{R}^3 с поверхностью S (т. е. подразумевается индуцированная топология). Единственность трактуется следующим образом: если через точку $M \in U_S$ проходят две интегральные кривые ($x \in U_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\bar{x})$) в расширенном смысле, то они совпадают в достаточно малой окрестности M . *Особые* точки образуют дополнение $S \setminus \{M_0\}$. Решение, для которого все точки расширенной интегральной кривой особые, называется *особым решением*. Пустое множество тоже является множеством — особых точек может и не быть.

Если выполнено условие $F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$, то точка $M_0 = (x_0, y_0, p_0) \in S$ неособая. Действительно, в указанном выше смысле уравнение разрешимо относительно производной:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad |x - x_0| < \varepsilon_1, \quad |y - y_0| < \varepsilon_2, \\ f(x_0, y_0) &= p_0, \quad |f(x, y) - p_0| < \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Выберем любые начальные данные $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) \in \Pi \cap S$. В силу $f \in C^1$ по теореме Пикара имеем единственное решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$. По определению функции f

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) \in \Pi, \quad F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) = 0 \Rightarrow \tilde{p} = f(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Следовательно, через точку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p})$ пройдет единственная интегральная кривая $\Gamma(\varphi)$ в расширенном пространстве $\{(x, y, p)\}$.

Итак, подмножество S , описываемое системой уравнений

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0, \quad (x, y, p) \in D,$$

содержит все особые точки. В проекции на плоскость $\{(x, y)\}$ получаем некоторое множество R . Часто оно описывается в неявной форме уравнением $r(x, y) = 0$ после исключения переменной

p из системы и является объединением гладких кривых. Среди них могут оказаться интегральные кривые (в том числе и в параметрической форме). Что касается терминологии, то множество R обычно называют *p -дискриминантной кривой* (из-за процедуры исключения параметра p). Здесь следует иметь в виду условность термина «кривая». В литературе можно встретить различные определения той или иной «особости», так что за этим нужно следить в каждом конкретном случае.

В приложениях (геометрия, оптика) представляют интерес особые решения, обладающие следующим свойством: в каждой точке интегральной кривой (на плоскости (x, y)) её касается другая интегральная кривая, не совпадающая с исходной в сколь угодно малой окрестности точки касания. На языке геометрии речь идет об *огibaющей* семейства кривых. На этом остановимся, общая теория требует более углубленного изложения [16, 27].

Методы интегрирования. Общим приемом интегрирования уравнения (4.1) является введение параметра $p = y'$ и поиск решений в параметрической форме $x(p), y(p)$. Достаточные условия правомерности последующих технических выкладок относительно сложны, поэтому обычно придерживаются следующей схемы. Проводят формальные преобразования, а затем проверяют (начиная с подстановки в уравнение), действительно ли получено то решение, которое искали. В дальнейших рассуждениях общего характера ограничимся первым этапом.

Поясним геометрический смысл выбора параметра $p = y'$. Рассмотрим функцию $f \in C^2(I)$ на некотором интервале I , предполагая, что вторая производная $f''(x)$ не меняет знак. Пусть для определенности $f'' > 0$. Тогда функция $y = f(x)$ выпуклая, производная f' строго монотонно возрастает на интервале I , имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$x \leftrightarrow f'(x), \quad x \in I = (a, b), \quad \{f'(x)\} = J = (c, d).$$

Значит, вместо $x \in I$ можно взять в качестве независимой переменной $p \in J$. Геометрически: вместо абсциссы за параметр принимаем тангенс угла наклона касательной к графику $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$. Задание $p \in J$ однозначно определяет

$x = \varphi(p)$ и точку на графике ($y = \psi(p)$). Что касается решений уравнения (4.1), то, поскольку они искомые, трудно заранее определить интервалы выпуклости или вогнутости. Этап анализа результата формальных преобразований необходим.

1°. Пусть уравнение не содержит x : $F(y, y') = 0$. Если удастся выразить $y' = g(y)$, то имеем уравнение с разделяющимися переменными. В случае разрешимости в форме $y = \psi(y')$ вводим параметр $p = y'$: $y = \psi(p)$. Осталось найти $x = \varphi(p)$ для получения «кандидата на решение» $p \mapsto (\varphi(p), \psi(p))$. Продифференцируем соотношение $y = \psi(p)$ по x , подразумевая $p = p(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = p = \psi'_p(p) \frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{\psi'_p(p)}{p} dp.$$

По контексту нижний индекс p не означает частную производную: $\psi = \psi(p) \Rightarrow \psi'_p = d\psi/dp$ (чтобы отличить от $y' = dy/dx$). После интегрирования получаем зависимость $x = \varphi(p, C)$. Как условились, не останавливаемся на деталях: дифференцируемость функции ψ , деление на p (проверка «решения» $p = 0$), ...

2°. Пусть уравнение (4.1) не содержит y : $F(x, y') = 0$. Вариант $y' = f(x)$ приводит к первообразным, рассмотрим случай $x = \varphi(p)$ ($p = y' = dy/dx$):

$$dy = p dx = p dx(p) = p \varphi'_p(p) dp \Rightarrow y = \psi(p, C).$$

3°. Пусть функция $F(x, y, p)$ однородная степени m (ограничимся для простоты целыми $m \in \mathbb{Z}$) по переменным x, y : $F(\lambda x, \lambda y, p) = \lambda^m F(x, y, p)$. Подразумевается, что наборы аргументов функции F слева и справа находятся в пределах рассматриваемой области D . Пусть допустимы $\lambda = 1/x$ ($x \neq 0$), например, $D = \mathbb{R}^2 \times (p_1, p_2)$. Тогда приходим к уравнению $F(1, y/x, p) = 0$ ($x \geq 0$). Если его удалось разрешить относительно p , то получаем однородное уравнение $y' = f(y/x)$ (§ 2). Предположим $y/x = \varphi(p)$. Дифференцируем $y = x\varphi(p)$ по x :

$$y' = p = \varphi(p) + x \varphi'_p(p) \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\varphi'_p(p)}{p - \varphi(p)} dp.$$

Интегрируя, получаем $x = \psi(p, C)$ ($p \neq \varphi(p)$). Далее анализируем формальное представление $x = \psi(p, C)$, $y = \varphi(p)\psi(p, C)$ и случай наличия корней уравнения $p = \varphi(p)$ в зависимости от имеющейся информации об искомом решении.

4°. *Уравнение Клеро* (1713–1765). Рассмотрим уравнение касательной: $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ или $y = ax + b$ ($a = y'_0$, $b = y_0 - x_0 y'_0$). Если решаются геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по заданному свойству её касательной (не зависящему от точки касания), то приходят к соотношению между величинами a и b : $F(y'_0, y_0 - x_0 y'_0) = 0$. Нижний индекс можно опустить ввиду произвольности точки искомой кривой. Разрешив соотношение $F = 0$ относительно второго аргумента, получаем уравнение Клеро:

$$y = xy' + f(y').$$

Изоклины, определяемые одинаковым наклоном касательных ($y' = \text{const}$), являются прямыми $y = Cx + f(C)$. Подстановкой убеждаемся, что это решения. Все ли это решения? Вводим параметр $p = y'$ и дифференцируем уравнение по переменной x :

$$y' = p = p + x \frac{dp}{dx} + f'_p(p) \frac{dp}{dx} \Rightarrow (x + f'_p(p)) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Вариант $p'_x = 0$ дает $p = C$ и уже полученное семейство прямых. Остается

$$x = -f'_p(p), \quad y = -p f'_p(p) + f(p).$$

Часто именно это представление дает искомое решение, причем особое. Кратко в качестве примера рассмотрим пару уравнений Клеро $y = xy' \pm ay'(1 + y'^2)^{-1/2}$, описывающих кривые со следующим свойством: отрезок каждой касательной, заключенный между координатными осями, имеет фиксированную длину a . Интуитивно ясно, что подходят прямые. Действительно, заменяя в уравнении y' на произвольную константу C , получаем семейство решений (проверяется подстановкой). Методом введения параметра $p = y'$ дополнительно находятся огибающие, образующие *астроиду* (подробнее см. [26, с. 109]): $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Астроида — это не просто «красивая» кусочно-гладкая кривая (см.: Арнольд В. И. Астроидальная геометрия гипоциклоид и гессианова топология гиперболических многочленов. М.: МЦНМО, 2001. 80 с.).

5°. Уравнение Лагранжа: $y = xf(p) + g(p)$, $p = y'$.

Формально дифференциальное уравнение Клеро является частным случаем: $f(p) \equiv p$, но в историческом контексте уравнение Лагранжа — обобщение уравнения Клеро. Дифференцируем:

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + xf'_p(p) \frac{dp}{dx} + g'_p(p) \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'_p(p)}{p - f(p)} x + \frac{g'_p(p)}{p - f(p)}.$$

Получили линейное уравнение, которое интегрируется в квадратурах: $x = \varphi(p, C)$. Подставляя в исходное уравнение, имеем $y = \psi(p, C)$. Если у f имеется неподвижная точка $\bar{p} = f(\bar{p})$, то подстановкой убеждаемся, что $y = xf(\bar{p}) + g(\bar{p})$ — решение.

6°. *Ортогональные траектории.* Задано параметрическое семейство кривых в форме $f(x, y, C) = 0$. Требуется найти траектории, пересекающие кривые семейства под прямым углом. Например, по силовым линиям потенциального поля сил требуется построить эквипотенциальные линии. Считая, что $y = y(x)$, дифференцируем соотношение $f = 0$ по x : $f'_x + f'_y y' = 0$. Исключив из двух уравнений C , получим уравнение $F(x, y, y') = 0$. Если $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол наклона касательной), то у искомого ортогонального семейства $y'_\perp = \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi/2) = -1/y'$. Остается решить дифференциальное уравнение $F(x, y, -1/y') = 0$.

5. Понижение порядка ОДУ

В заключение главы изложим некоторые формальные приемы, позволяющие понизить порядок. Ограничимся для определенности уравнениями второго порядка, которые часто встречаются в приложениях. Напомним, что преобразования без достаточного предварительного обоснования требуют последующей проверки результата: действительно ли найдено требуемое решение.

1°. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Пусть на интервале $I = (a, b)$ известно частное решение $y_*(x) \neq 0 \forall x \in I$. Сделаем замену $y(x) = y_*(x)z(x)$, где $z(x)$ — новая искомая функция. Поскольку $y^{(k)} = (y_*z)^{(k)} = y_*^{(k)}z + \dots$ где троеточие содержит производные функции z , то при z будет коэффициент $y_*'' + py_*' + qy_* \equiv 0$. Следовательно, уравнение для $z(x)$ не содержит z и подстановка $z' = w$ приводит к ОДУ 1-го порядка относительно $w(x)$.

2°. Однородное уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ имеет тривиальное решение $y \equiv 0$. Для решений, не обращающихся в нуль на интервале I (не обязательно заданном заранее), определим функцию $z(x) = y'(x)/y(x)$. Представляя производные в форме

$$y' = zy, \quad y'' = z'y + zy' = [z' + z^2]y,$$

приходим к уравнению Риккати $z' + p(x)z + z^2 + q(x) = 0$. Конечно заключаем, что в общем случае не следует надеяться на интегрирование исходного линейного уравнения в квадратурах.

3°. Если уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ не содержит явно переменную x или y , то порядок можно понизить на единицу. Действительно, если отсутствует y , то заменяем $y'(x) = z(x)$. В случае $F = \Phi(y, y', y'') = 0$ делаем подстановку $z = y'$, предполагая y в качестве новой независимой переменной:

$$y' = z, \quad y'' = (y')' = z'_x = z'_y y'_x = z z'_y, \quad f(y, z, z'_y) = 0.$$

Нижний индекс означает дифференцирование по выбранной переменной (здесь не идет речь о частных производных). В общем случае предварительно установить правомерность и эквивалентность подобных преобразований затруднительно. В частности, неявно при замене независимой переменной x на y исключались решения $y(x) = \bar{y} = \text{const}$ (если $\Phi(\bar{y}, 0, 0) = 0$). На заключительном этапе, если удастся найти решение $f(y, z, z'_y) = 0$ в форме $z = z(y, C)$, еще предстоит анализировать однопараметрическое уравнение с разделяющимися переменными $y' = z(y, C)$.

4°. Рассмотрим уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$, которое положительно однородно по переменным y, y', y'' в смысле равенства

$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'')$, $t > 0$ (в пределах области рассмотрения дифференциального уравнения). Последовательные замены $y(x) = \exp\{z(x)\}$, $z'(x) = w(x)$ понижают порядок:

$$y' = \exp\{z\}z', \quad y'' = \exp\{z\}[z'^2 + z''], \quad F(x, 1, w, w' + w^2) = 0.$$

Если явно не входит x ($F = \Phi(y, y', y'')$), то целесообразно из полученного уравнения выразить $w' = \phi(w)$. Возможно, для решения конкретной задачи достаточно рассмотреть лишь частные решения в форме $y = C \exp\{\lambda x\}$, при условии $\Phi(1, \lambda, \lambda^2) = 0$.

В литературе можно найти более подробное и обстоятельное изложение темы. В частности, представленные формальные приемы непосредственно обобщаются на уравнения n -го порядка. В заключение акцентируем внимание на уравнении $\ddot{x} = f(x)$ — это второй закон Ньютона, когда сила определяется положением материальной точки на прямой. Положим $\dot{x} = z$ и перейдем к новой независимой переменной x (на промежутках монотонности движения): $\ddot{x} = d(\dot{x})/dt = (dz/dx)z = f(x)$,

$$dz^2 = 2f(x) dx, \quad z^2 = 2 \int f(x) dx + C \equiv \psi(x, C), \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\psi(x, C)}.$$

Еще одна квадратура приводит к «явной» формуле, которая обычно служит лишь началом подробного анализа движений.

Глава II

Существование и единственность решений задачи Коши

В этой главе при изучении общих свойств решений ОДУ, следуя определенной традиции, будем придерживаться механической терминологии. Независимую переменную обозначаем t и интерпретируем как время. Систему ОДУ в *нормальной форме*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

записываем в векторных обозначениях как

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Элементы \mathbb{R}^n , состоящие из упорядоченных наборов n вещественных чисел, считаем и точками и векторами (со стандартным скалярным произведением). В случае необходимости различать векторы-строки и векторы-столбцы компоненты записываем столбцом: $x = (x_1 \dots, x_n)^\top$, $f = (f_1 \dots, f_n)^\top$. Рассматриваемое множество G определения уравнения (вектор-функции f) считаем областью в \mathbb{R}^{n+1} . *Решением* называется вектор-функция $x = \varphi(t)$, $t \in I = (t_1, t_2)$, обращающая уравнение в тождество по $t \in I$. При этом *интегральная кривая* (график решения $t \mapsto \varphi(t)$) $\Gamma = \{(t, \varphi(t)) \mid t \in I\}$ должна находиться в пределах G . Из существования производной $\dot{\varphi}(t)$ следует её непрерывность, поскольку по умолчанию f как минимум непрерывна:

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \Rightarrow \varphi \in C^1 = C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

Задача Коши (начальная задача) формулируется следующим образом: найти решение, определенное на некотором интервале времени I и удовлетворяющее заданному начальному условию

$\varphi(t_0) = x_0$ ($t_0 \in I$, $(t_0, x_0) \in G$). Геометрически это означает, что интегральная кривая должна проходить через точку (t_0, x_0) .

Подчеркнем, что решением является отображение $t \mapsto \varphi(t)$ (при необходимости можно рассматривать и промежутки времени $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$), а носитель $\gamma = \{\varphi(t) | t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *фазовой кривой*. Фазовая кривая является ортогональной проекцией интегральной кривой в *фазовое пространство* $X = \{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Фазовое пространство образуют возможные *состояния* объекта, описываемые в модели вектором $x = (x_1 \dots, x_n)^\top$. Название X связано с тем, что (в прошлом) состояния назывались фазами.

Вектор скорости $\dot{\varphi}(t)$ является касательным к γ в точке $\varphi(t)$, т. е. принадлежит *касательному пространству* $T_{\varphi(t)}\gamma$ — воспринимаем $\dot{\varphi}(t)$ как вектор из \mathbb{R}^n , прикрепленный к точке $\varphi(t)$. По определению $0 \in T_{\varphi(t)}\gamma$. Вектор $(1, \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ в точке $(t, \varphi(t))$ является касательным к интегральной кривой Γ . Векторное поле $(t, x) \mapsto (1, f(t, x))$ определяет *поле направлений* в области G , состоящее из прямых, проходящих через точки $(t, x) \in G$ с направляющим вектором $(1, f)$. Интегральные кривые касаются поля направлений (прямых поля в каждой своей точке). Обратное, если непрерывно дифференцируемая кривая $t \mapsto (t, \varphi(t))$, $\varphi \in C^1(I)$, касается поля направлений ($(1, \dot{\varphi}) = (1, f)$), то её график $\{(t, \varphi(t))\}$ является интегральной кривой.

Начнем с доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для скалярного дифференциального уравнения. «С непривычки» доказательство может показаться длинным и сложным. Его необходимо терпеливо прочесть. В следующем параграфе выяснится, что схема доказательства универсальна и относительно проста для запоминания, но сначала нужен повод для обсуждения аналогий и обобщений.

1. ТЕОРЕМА ПИКАРА

Приведем условия задачи Коши (найти решение $x = \varphi(t)$ с начальными данными $(t_0, x_0) \in G$) компактно, ограничившись для

упрощения технических выкладок скалярным случаем ($n = 1$):

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad G \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

$$(t_0, x_0) \in G, \quad x = \varphi(t), \quad t \in I = (t_1, t_2), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если $f, f'_x \in C(G)$, то для любых начальных данных (t_0, x_0) решение задачи Коши существует и единственно.*

Существование предполагает, что решение $x = \varphi(t)$ определено на некотором интервале I , $t_0 \in I$ и $\varphi(t_0) = x_0$, т.е. интегральная кривая $\Gamma = \{(t, \varphi(t)) | t \in I\}$ проходит через точку (t_0, x_0) . Единственность понимается в локальном смысле: если существует другое решение этой же задачи, то решения совпадают в некоторой ε -окрестности начального момента времени t_0 .

Доказательство. Его удобно разбить на несколько этапов.

I. Интегральное уравнение. Пусть решение $x = \varphi(t)$ задачи Коши существует. Подставим его в уравнение (1.1) и проинтегрируем полученное тождество по времени от t_0 до t :

$$\varphi(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad t \in I.$$

Обратно, пусть найдено решение $\varphi \in C(I)$ интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I, \quad (1.2)$$

т.е. подстановка $x(\cdot) = \varphi(\cdot)$ дает тождество по $t \in I$. Под интегралом окажется непрерывная функция как композиция непрерывных, так что интеграл с переменным верхним пределом есть функция класса C^1 . Отсюда $\varphi \in C^1(I)$ и $\dot{\varphi} \equiv f(t, \varphi)$, $\varphi(t_0) = x_0$. Итак, поиск непрерывного решения интегрального уравнения эквивалентен решению исходной задачи. Будем искать решение (1.2) в классе $C(\bar{I})$, $\bar{I} = [t_1, t_2]$, $t_0 \in I = (t_1, t_2)$.

II. Последовательные приближения. Определим итерации:

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau, \quad k \geq 0. \quad (1.3)$$

Существует ли отрезок \bar{I} ($t_0 \in I$), на котором все функции $\varphi_k(t)$ определены? Рассмотрим два прямоугольника:

$$\Pi = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset G, \quad \Pi_\delta \subseteq \Pi,$$

где Π_δ отличается от Π лишь неравенством $|t - t_0| \leq \delta \leq a$. Число $\delta > 0$ уточним по ходу доказательства.

Обозначим $L_0 := \sup |f| = \max |f|$, $(t, x) \in \Pi$. В силу непрерывности $|f|$ и компактности Π максимум существует (по теореме Вейерштрасса). Справедлива следующая оценка:

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f| d\tau \right| \leq L_0 |t - t_0| \leq L_0 \delta,$$

если только $|t - t_0| \leq \delta$ и $(t, \varphi_k(t)) \in \Pi_\delta$. Выберем δ из условия $L_0 \delta \leq b$. Тогда из $\varphi_0(t) = x_0$, $(t, \varphi_0(t)) = (t, x_0) \in \Pi_\delta$, $|t - t_0| \leq \delta$ последовательно получаем $|\varphi_k(t) - x_0| \leq b \forall t \in \bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $k \geq 1$. Итак, на достаточно малом отрезке \bar{I} последовательность функций $\varphi_k(t)$ определена. По построению $\varphi_k \in C(\bar{I})$, $k \geq 0$.

III. Сходимость. Докажем теперь равномерную сходимость $\varphi_k \Rightarrow \varphi \in C(\bar{I})$. Для этого оценим разность:

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \{f(\tau, \varphi_k(\tau)) - f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))\} d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |\{\dots\}| d\tau \right| \leq L_1 \delta \max |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)|, \quad t \in \bar{I}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой конечных приращений Лагранжа по второму аргументу функции f :

$$\begin{aligned} |f(t, \varphi_k(t)) - f(t, \varphi_{k-1}(t))| &= |f'_x(t, \xi)(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t))| \leq \\ &\leq L_1 |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)|, \quad L_1 := \max_{\Pi} |f'_x(t, x)|. \end{aligned}$$

Время t считается фиксированным (но произвольным из \bar{I}), точка $\xi = \xi(t)$ лежит в интервале между числами $\varphi_{k-1}(t)$ и $\varphi_k(t)$. Если вдруг $\varphi_{k-1}(t) = \varphi_k(t)$, то неравенство сохраняется.

В обозначениях $\|\varphi_k - \varphi_s\| := \max |\varphi_k(t) - \varphi_s(t)|$ ($t \in \bar{I}$) имеем

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \leq q \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|, \quad k \geq 1, \quad q := L_1 \delta.$$

Сходимость последовательности эквивалентна сходимости ряда

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots, \quad t \in \bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

в том смысле, что функция φ_n равна частичной сумме S_{n+1} этого ряда. Полученные оценки позволяют промажорировать функциональный ряд следующим числовым рядом:

$$|x_0| + r + rq + r^2q + \dots = |x_0| + r(1 + q + q^2 + \dots), \quad r := \|\varphi_1 - \varphi_0\|.$$

В скобках, если дополнительно уменьшить (при необходимости) параметр δ так, чтобы выполнялось $0 < q = L_1 \delta < 1$, получаем сходящуюся геометрическую прогрессию. По признаку Вейерштрасса функциональный ряд равномерно сходится на отрезке времени \bar{I} . Из $\varphi_k \in C(\bar{I})$ и $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ следует включение $\varphi \in C(\bar{I})$.

Проверим, что функция $x = \varphi(t)$ является решением интегрального уравнения (1.2) на \bar{I} . Оценим разность интегралов:

$$\left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq L_1 \delta \|\varphi_k - \varphi\|.$$

Здесь снова воспользовались формулой конечных приращений Лагранжа. Из $|\varphi_k(t) - x_0| \leq b$ и $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ следует $|\varphi(t) - x_0| \leq b$, так что график $\{(t, \varphi(t))\}$ не покидает прямоугольник $\Pi_\delta \subseteq \Pi$ при $|t - t_0| \leq \delta$. Равномерная сходимость $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ последовательности непрерывных функций на отрезке \bar{I} эквивалентна сходимости числовой последовательности $\|\varphi_k - \varphi\|$ к нулю. Так что разность интегралов равномерно на отрезке времени \bar{I} стремится к нулю. Остается в соотношении (1.3) перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Непрерывная функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.2) на отрезке $\bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и на интервале $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ является C^1 -решением исходной задачи Коши.

IV. *Единственность.* Пусть имеется другое решение задачи $x = \psi(t)$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы оба решения

были определены при $|t - t_0| \leq \delta$ и выполнялись ограничения, определенные доказательством: $L_0\delta \leq b$, $L_1\delta = q < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi) - f(\tau, \psi)| d\tau \right| \leq q \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Справа число, не зависящее от $t \in \bar{I}$, так что для максимума левой части получаем $\|\varphi - \psi\| \leq q\|\varphi - \psi\|$. Поскольку $0 < q < 1$, то $\|\varphi - \psi\| = 0$, откуда $\varphi(t) \equiv \psi(t)$, $t \in \bar{I}$. Теорема доказана. \square

2. ОБОБЩЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Неподвижные точки. Запишем интегральное уравнение (1.2) в компактной форме. Для этого предварительно обозначим

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad t \in \bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \quad (2.1)$$

Здесь $x = \varphi(t)$ ($t \in I$) не обязательно решение задачи Коши. Это произвольная непрерывная функция на отрезке времени \bar{I} , график которой находится в пределах прямоугольника $\Pi_\delta \subseteq \Pi$. Обозначим множество таких функций через M . Никаких ограничений на $\delta > 0$, кроме $\Pi_\delta \subseteq \Pi \subset G$, пока не рассматриваем. Поскольку $\Pi \subset G$, то определена подынтегральная функция, а значит, и $x = \psi(t)$, $\psi \in C^1(\bar{I})$. Итак, каждой функции $\varphi \in M$ поставлена в соответствие функция $\psi \in N = C^1(\bar{I})$. Говорят, что на множестве M задан *оператор*, отображающий M в N . Обозначим определенный равенством (2.1) оператор через \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}: M \rightarrow N, \quad \varphi \mapsto \psi, \quad \mathcal{A}\varphi = \psi.$$

Наиболее «полной» являлась бы запись $\mathcal{A}(\varphi(\cdot)) = \psi(\cdot)$ (точка внутри скобок подчеркивает, что объект рассматривается как функция «в целом»), но далее будем использовать более лаконичные варианты. Обычно по контексту понятно, что означает

запись $f(x)$ — функцию $f(\equiv f(\cdot))$ или её значение в точке x . Формально запись $\mathcal{A}(\varphi(t)) = \psi(t)$ была бы неправильной (если заранее не договориться об обозначениях), поскольку только по одному числу $\varphi(t)$ не определяется значение $\psi(t)$ — требуется множество значений $\{\varphi(\tau)\}$ согласно формуле (2.1). В операторных обозначениях интегральное уравнение запишется в форме

$$x = \mathcal{A}x, \quad x(\cdot) = \mathcal{A}x(\cdot), \quad x = x(\cdot) \in M.$$

Это задача о *неподвижной точке*: требуется найти такой элемент, который под действием оператора \mathcal{A} не изменится.

В процессе доказательства теоремы Пикара показано, что $\forall (t_0, x_0) \in G$ при достаточно малых $\delta \in (0, \delta_0)$ существует единственная неподвижная точка $x(\cdot) = \varphi(\cdot)$ оператора $\mathcal{A}: M \rightarrow N$.

Метод последовательных приближений $\varphi_{k+1} = \mathcal{A}\varphi_k$ — это аналог метода *простой итерации* решения скалярного уравнения $x = f(x)$. Решение $x_* = f(x_*)$ определяется абсциссой пересечения графиков функций $y = x$ и $y = f(x)$. В общем случае итерации $x_{k+1} = f(x_k)$ могут расходиться, неподвижной точки x_* нет или она не единственна. На рис. 2.1, 2.2 приведены иллюстрации метода последовательных приближений.

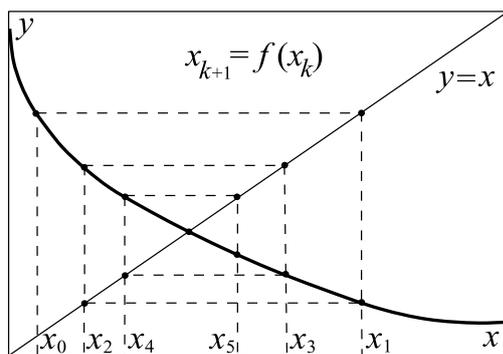
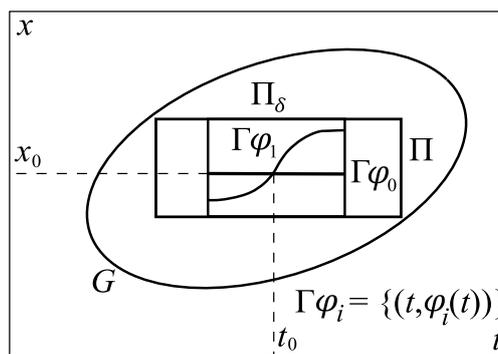


Рис. 2.1. Простые итерации

Рис. 2.2. Приближения φ

Нормированные пространства. Обозначение $\|\cdot\|$ введено не случайно. Это норма, обобщение понятия модуля числа. Кратко приведем определения. На аксиомах линейного (векторного)

пространства не останавливаемся, ограничимся вещественным случаем (над полем \mathbb{R}), нули обозначаем одним символом.

Линейное пространство \mathcal{B} называется *нормированным*, если в нем задана *норма* — отображение $\|\cdot\|: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

$$1) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad 2) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{неравенство треугольника}).$$

Это аксиомы модуля $|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Приведем несколько примеров.

1°. В \mathbb{R}^n обычно пользуются следующими нормами:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle, \quad \|x\|_3 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Вторая норма называется *евклидовой*, она определяется скалярным произведением $\langle x, x \rangle_{E^n}$ и обозначается $|x|$. Первая и третья нормы называются соответственно *кубической* и *октаэдрической*. Это связано с тем, что в общей теории нормированных пространств множество $\{x : \|x - a\| \leq r\}$ называется шаром. В евклидовой (сферической) норме получаем привычный шар, а в двух других — куб и октаэдр. На плоскости ($n = 2$) это соответственно круг, квадрат и ромб.

Норма позволяет ввести расстояние $\rho(x, y) = \|x - y\|$, так что $\|x\|$ — расстояние от элемента x до нуля. Далее можно строить «привычный» математический анализ. Ограниченность множества $M \subset \mathcal{B}$ означает $\|x\| \leq C = \text{const} \quad \forall x \in M$; открытость: $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0$, для которого $\{y : \|y - x\| < \varepsilon\} \subseteq M$; сходимость последовательности $x^n \rightarrow \bar{x}$: $\|x^n - \bar{x}\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. Вверху у элемента x^k номер, а не степень, нижние индексы сохраняем для нумерации компонент векторов (в конечномерном случае).

Сходимость по норме в $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ эквивалентна покомпонентной сходимости $x_i^n \rightarrow \bar{x}_i, 1 \leq i \leq n$, так что предельные переходы можно делать в любой норме. Нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны в смысле $c_1 \|\cdot\|_i \leq \|\cdot\|_j \leq c_2 \|\cdot\|_i$, например, $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_1$. Выбор нормы диктуется конкретной задачей.

2°. Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ — линейное пространство вещественных матриц $A = \{a_{ij}\}_1^n$ размерности $n \times n$. Для *матричных норм* добавляют требование $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (аксиому 4). Матричная

норма A согласована с нормой вектора, если $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Среди согласованных для точности оценок выбирают наименьшую (среди чисел $\|A\|$): $\|A\| = \max \|Ax\|$, $\|x\| = 1$. Такая матричная норма называется *индуцированной* или *подчиненной* нормой вектора. Она определена корректно, так как отображение $x \mapsto Ax$ непрерывно, а единичная сфера компактна. Подчиненными нормам $\|\cdot\|_{1,3}$ в \mathbb{R}^n являются:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_3 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Для $\|A\|_2$ справедлива оценка $\|A\|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \text{Tr}(A^T A)$. Значение $\|A\|_2$ определяется в терминах собственных чисел, вычисление которых непросто. Подробности можно найти в книгах по теории матриц. В дальнейшем потребуется лишь оценка $\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$, так что убедимся в её справедливости:

$$\begin{aligned} |(Ax)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \\ &\leq \|x\|_1 \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \|x\|_1 \|A\|_1 \Rightarrow \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1. \end{aligned}$$

3°. В пространстве $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ принята следующая норма:

$$\|f\| = \|f\|_C = \max |f(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Сходимость в норме $\|\cdot\|_C$ — это равномерная сходимость на $[a, b]$. Она является аналогом кубической нормы $\|\cdot\|_1$ в \mathbb{R}^n , только роль индекса (номера компоненты вектора) играет переменная x .

Можно ввести аналог евклидовой нормы, заменяя сумму конечного числа слагаемых интегралом по «индексу» $x \in [a, b]$:

$$\|f\| = \|f\|_{L_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2}} = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{1/2}.$$

Расстояние $\|f - g\|_C$ означает максимальное по модулю отклонение друг от друга функций f и g , а $\|f - g\|_{L_2}$ — среднеквадратичное отклонение ($\|\cdot\|_{L_2}$ определяет *сходимость в среднем*).

Перейдем к важнейшему понятию *полноты* нормированного пространства \mathcal{B} . Последовательность $x^k \in \mathcal{B}$ называется *фундаментальной*, если $\lim \|x^k - x^s\| = 0, k, s \rightarrow +\infty$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: k, s > N \Rightarrow \|x^k - x^s\| < \varepsilon.$$

Пространство \mathcal{B} называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность является сходящейся. Такие нормированные пространства называются также *банаховыми* в честь Стефана Банаха (1892–1945), одного из основателей теории. Пространства $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}, C[a, b]$ полные (C — в силу критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций).

Сходимость ряда $x^1 + \dots + x^k + \dots$ ($x^k \in \mathcal{B}$) определяется как сходимость частичных сумм. Как и в курсе математического анализа доказывается, что если ряд сходится в банаховом пространстве по норме (т. е. сходится мажорирующий числовой ряд из норм элементов), то и сам ряд сходится.

Приведенные сведения и техника оценок по норме (формально как по модулю) позволяют компактно представить (и относительно легко запомнить) схему доказательства теоремы Пикара.

Принцип сжимающих отображений. Рассмотрим в банаховом пространстве \mathcal{B} задачу о неподвижной точке: $\varphi = \mathcal{A}\varphi$. Именно к этой задаче сводится решение интегрального уравнения (1.2). Метод последовательных приближений (простых итераций) определяется начальным приближением $\varphi_0 \in \mathcal{B}$ и генерацией последовательности $\varphi_{k+1} = \mathcal{A}\varphi_k, k \geq 0$. Задача состоит в обосновании сходимости $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ к неподвижной точке.

Оператор $\mathcal{A}: M \subseteq \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, называется *сжатием* M , если:

$$1) \mathcal{A}: M \rightarrow M; \quad 2) \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in M, \quad 0 < q < 1.$$

Сжимающий оператор (короче, сжатие) отображает подмножество M в себя и уменьшает расстояние между элементами M .

ТЕОРЕМА 2 (принцип сжимающих отображений). *Если подмножество $M \subseteq \mathcal{B}$ замкнуто и оператор \mathcal{A} является сжатием M , то неподвижная точка в M существует и единственна.*

Сразу оговоримся, что имеется большое количество обобщений. Замкнутость множества M означает, что ему принадлежат все его предельные точки. Точка $\bar{x} \in \mathcal{B}$ является предельной для M , если в любой ε -окрестности \bar{x} содержатся точки $y \in M$, $y \neq \bar{x}$.

Доказательство. Выберем произвольное начальное приближение $\varphi_0 \in M$ и определим последовательность $\varphi_{k+1} = \mathcal{A}\varphi_k$, $k \geq 0$. Поскольку $\varphi_0 \in M$ и $\mathcal{A}: M \rightarrow M$, то $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq M$. Если вдруг на какой-то итерации $\varphi_{s+1} = \varphi_s$, то находимся в неподвижной точке и сразу переходим к доказательству единственности.

Докажем сходимость последовательности, или, что эквивалентно, ряда $\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \dots$. Поскольку

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| = \|\mathcal{A}\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_0\| \leq q\|\varphi_1 - \varphi_0\|, \dots,$$

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \leq q\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq \dots \leq q^k\|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

(это нетрудно формализовать методом математической индукции), то получаем мажорирующий числовой ряд

$$\|\varphi_0\| + \|\varphi_1 - \varphi_0\|(1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots),$$

сходящийся в силу $0 < q < 1$. Следовательно, $\varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{B}$, все элементы φ_k различны (нет «циклов») и по предположению замкнутости множества M имеем включение $\varphi \in M$.

Элемент φ неподвижен. Сначала покажем, что $\mathcal{A}\varphi_k \rightarrow \mathcal{A}\varphi$:

$$\|\mathcal{A}\varphi_k - \mathcal{A}\varphi\| \leq q\|\varphi_k - \varphi\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Остается перейти в определении последовательности элементов $\varphi_{k+1} = \mathcal{A}\varphi_k$ к пределу по k слева и справа: $\varphi = \mathcal{A}\varphi$.

Единственность доказывается от противного. Пусть $\psi \in M$ тоже неподвижная точка: $\psi = \mathcal{A}\psi$. Тогда получаем

$$\|\psi - \varphi\| = \|\mathcal{A}\psi - \mathcal{A}\varphi\| \leq q\|\psi - \varphi\| \Rightarrow \psi = \varphi.$$

□

Помимо доказательства утверждения можно получить и оценку скорости сходимости приближений к решению. Оценим по норме разность $\varphi_{k+s} - \varphi_k$, используя неравенство треугольника, формулу для суммы прогрессии и значение $r = \|\varphi_1 - \varphi_0\|$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+s} - \varphi_k\| &\leq \|\varphi_{k+s} - \varphi_{k+s-1}\| + \dots + \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \leq \\ &\leq (q^{k+s-1} + \dots + q^k)r = \frac{q^k - q^{k+s}}{1 - q} r \leq \frac{q^k}{1 - q} r. \end{aligned}$$

Отсюда, кстати, следует фундаментальность последовательности $\{\varphi_k\}$ и сходимость $\varphi_k \rightarrow \varphi \in M$, так как \mathcal{B} полно и M замкнуто. Переходя к пределу при $s \rightarrow +\infty$, получаем оценку скорости сходимости: $\|\varphi - \varphi_k\| \leq rq^k/(1 - q)$.

По прочтении этого материала желательно вернуться к приведенному доказательству теоремы Пикара и убедиться в «прозрачности» каждого из этапов рассуждений.

Теорема Пикара ($\forall n$). В векторных обозначениях формулировка теоремы остается без изменений: *если $f, f_x \in C(G)$, то $\forall (t_0, x_0) \in G$ решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ существует и единственно*. Формальная запись $f, f_x \in C$ означает непрерывность компонент f_i вектор-функции f и элементов $\partial f_i / \partial x_j$ матрицы Якоби f_x (размерности $n \times n$).

Доказательство усложняется лишь в техническом плане. Интегральное уравнение не меняется, только становится векторным. Вместо модуля удобно использовать кубическую норму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, так что при определении прямоугольников Π, Π_δ принимается неравенство $\|x - x_0\| = \max |x_i - x_{i0}| \leq b$ ($1 \leq i \leq n$). В качестве банахова пространства \mathcal{B} возьмем множество непрерывных вектор-функций на отрезке $\bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_C = \max_{1 \leq i \leq n} \max_t |x_i(t)| = \max_t \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in \bar{I}.$$

Множество $M \subset \mathcal{B} = C_n(\bar{I}) = C(\bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ охарактеризуем принадлежностью графиков вектор-функций прямоугольнику Π_δ . Выбор параметра δ определяется условием сжатия.

Для существования решения задачи Коши достаточно непрерывности f (теорема Пеано). Дополнительное условие $f_x \in C$ гарантирует единственность. Это ограничение можно ослабить. Действительно, в приведенном доказательстве на самом деле достаточно неравенства $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ ($L = \text{const}$) в рассматриваемом прямоугольнике Π . Это так называемое *условие Липшица*: говорят, что функция $f(t, x)$ *липшицева* по x в Π . Включение $f'_x \in C$ влечет липшицевость: в качестве константы Липшица можно взять $L = \max |f'_x(t, x)|$, $(t, x) \in \Pi$.

Перейдем к системе ОДУ в нормальной форме $\dot{x} = f(t, x)$. Вектор-функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется локально липшицевой по фазовым переменным — компонентам вектора состояния $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, если у каждой точки $(t_0, x_0) \in G$ найдется окрестность (можно ограничиться достаточно малым прямоугольником Π), в которой справедлива оценка

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad L = \text{const}.$$

Выбор нормы в \mathbb{R}^n изменит разве лишь значение L . Непрерывность матрицы f_x (т. е. частных производных $\partial f_i / \partial x_j$) является более сильным ограничением: $f_x \in C \Rightarrow f \in \text{locLip}_x(G)$.

Итак, для существования и единственности решения задачи Коши в области G достаточно включения $f \in C(G) \cap \text{locLip}_x(G)$. Заинтересованному читателю желательно не ограничиться приведенными общими соображениями, а изучить доказательство со всеми техническими подробностями (например, по книгам [13, 16, 21, 23, 29]). В порядке компенсации пропущенного доказательства векторной теоремы Пикара более подробно на технике оценок по норме остановимся в параграфе, посвященном начальной задаче для линейных и управляемых систем.

Комментарии. 1°. В условиях теоремы Пикара единственность решения задачи Коши имеет место в следующем более сильном смысле: два решения совпадают на пересечении промежутков своего определения. Подобные рассуждения уже проводились в главе I. Рассмотрим два решения начальной задачи:

$$\{\varphi, \langle t_1, t_2 \rangle\}, \{\psi, \langle t_3, t_4 \rangle\}, \quad t_0 \in (t_1, t_2) \cap (t_3, t_4), \quad \varphi(t_0) = \psi(t_0).$$

Обозначим $S = \langle t_1, t_2 \rangle \cap \langle t_3, t_4 \rangle$, топология индуцирована из \mathbb{R} (окрестности точки в S — это пересечения с S окрестностей этой точки в \mathbb{R}). Множество $R = \{t \in S \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$ открыто в S , так как если $t_* \in R$, то найдется интервал $(t_* - \delta, t_* + \delta)$, на котором $\varphi(t) = \psi(t)$: точку $(t_*, \varphi(t_*))$ принимаем за начальную $(t_0, x_0) \in G$. В пересечении с S получим открытую окрестность t_* в S , принадлежащую R . Вместе с тем R замкнуто в S :

$$t_i \in R, t_i \rightarrow \bar{t} \in S \Rightarrow \varphi(t_i) = \psi(t_i), \varphi(\bar{t}) = \psi(\bar{t}) \Rightarrow \bar{t} \in R.$$

Получается, что R одновременно и открыто и замкнуто в связном множестве S . Тогда либо $R = S$, либо $R = \emptyset$, но $R \neq \emptyset$ ($t_0 \in R$), поэтому $\varphi(t) = \psi(t)$ для всех $t \in S = \langle t_1, t_2 \rangle \cap \langle t_3, t_4 \rangle$.

2°. Результат естественным образом переносится на задачу Коши для уравнения n -го порядка в *нормальной форме*:

$$x^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}), \quad x(t_0) = x_{10}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}.$$

Действительно, в переменных $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$ получаем систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = g(t, x_1, \dots, x_n).$$

3°. Утверждение теоремы носит локальный характер (при достаточно малом $\delta \dots$). Вопрос о продолжимости решений выделяется в самостоятельную задачу. С теоремами о продолжимости можно ознакомиться, например, в [3, 13, 23]. В частности, чтобы решение $\varphi: \langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ было продолжимо вправо, необходимо и достаточно существования предела $z = \varphi(t_2 - 0)$ и включения $(t_2, z) \in G$. Для продолжения достаточно переобозначить $(t_2, z) = (t_0, x_0)$ и воспользоваться теоремой Пикара. Аналогично рассматривается продолжимость влево. Как и в скалярном случае, определено полное решение, которое нельзя продолжить ни влево, ни вправо. Процедура продолжения приводит к максимальному интервалу существования решения.

3. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров, включая функциональные возмущения правой части, трактуется как корректность постановки задачи, поскольку в приложениях погрешности реализации модели неизбежны. В параграфе приведены лишь некоторые начальные сведения, для более углубленного и систематического изучения темы следует обратиться к книгам [3, 13, 23, 28, 29].

Гладкость по времени. Для упрощения технических выкладок ограничимся скалярным уравнением ($n = 1$)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad G \subseteq \mathbb{R}^2,$$

в предположениях теоремы Пикара ($f, f'_x \in C(G)$). Решения $x = \varphi(t)$ на интервале своего определения $I = (t_1, t_2)$ являются функциями класса $C^1(I)$. А что если имеет место включение $f \in C^p(G)$, $p \geq 1$? Тогда тождество $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ можно продифференцировать по t , поскольку справа функция из $C^1(I)$:

$$\ddot{\varphi}(t) \equiv f'_t(t, \varphi(t)) + f'_x(t, \varphi(t))\dot{\varphi}(t), \quad t \in I.$$

В качестве следствия получаем $\varphi \in C^2(I)$. Продолжая дифференцировать, пока позволяет гладкость функции f , заключаем, что $f \in C^p(G) \Rightarrow \varphi \in C^{p+1}(I)$. С ростом гладкости правой части уравнения в нормальной форме растет и гладкость решения.

Для систем ($n > 1$) результат остается без изменений. Только в векторных обозначениях, в частности, вместо частной производной f'_x будет матрица Якоби $f'_x = \{\partial f_i / \partial x_j\}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Непрерывность по параметру. Математические модели содержат различные параметры, коэффициенты. Их оценка и задание на практике возможны лишь с определенной точностью. Малые отклонения в значениях параметров модели должны приводить к малым изменениям решений, т. е. речь идет о требовании непрерывной зависимости решений от параметров.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3.$$

В области D считаем функции f и f'_x непрерывными. Заданы начальные данные (t_0, x_0) и фиксировано («идеальное») значение μ_0 . По указанной причине нас интересует окрестность μ_0 , так что решение задачи Коши будет зависеть от параметра μ .

ТЕОРЕМА 3. *Для произвольного набора значений $(t_0, x_0, \mu_0) \in D$ решение $x = \varphi(t, \mu)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ определено в некотором прямоугольнике $|t - t_0| < \delta$, $|\mu - \mu_0| < c$ и непрерывно в этой области по совокупности переменных.*

Доказательство. Несколько модифицируем приведенное в §1 доказательство теоремы Пикара. Определим прямоугольники

$$\Pi: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, |\mu - \mu_0| \leq c,$$

$$\Pi_\delta: |t - t_0| \leq \delta \leq a, \dots, \Pi_\delta \subseteq \Pi \subseteq D,$$

и ограничимся $t \in \bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\mu \in \bar{J} = [\mu_0 - c, \mu_0 + c]$. Поскольку решение с начальными данными (t_0, x_0) зависит от параметра μ , то интегральное уравнение примет вид

$$x(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau, \mu), \mu) d\tau, \quad (t, \mu) \in \bar{I} \times \bar{J}.$$

Определим начальное приближение $\varphi_0(t, \mu) = x_0$ и итерации

$$\varphi_{k+1}(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau, \mu), \mu) d\tau, \quad k \geq 0.$$

Далее схема доказательства практически не меняется. Только вместо одной переменной имеем пару (t, μ) . При достаточно малом $\delta \in (0, \delta_0)$ получаем решение интегрального уравнения $\varphi(t, \mu)$ ($\varphi(t_0, \mu) = x_0$, $|\varphi(t, \mu) - x_0| \leq b$), определенное в замкнутом прямоугольнике $\bar{I} \times \bar{J}$. По совокупности переменных функция φ непрерывна, поскольку по построению все $\varphi_k \in C(\bar{I} \times \bar{J})$ и сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ к φ равномерная на компакте $\bar{I} \times \bar{J}$. Других непрерывных решений (неподвижных точек в $C(\bar{I} \times \bar{J})$) нет. При каждом фиксированном $\mu \in \bar{J}$ функция $\varphi(\cdot, \mu) : I \rightarrow \mathbb{R}$ представляет решение задачи Коши. Что касается других решений, то в силу единственности они формально отличаются от $\varphi(\cdot, \mu)$ лишь промежутками определения. \square

Более подробно остановимся на обосновании включения $\varphi_k \in C(\bar{I} \times \bar{J})$. Фиксируем произвольную функцию $\tilde{\varphi}$ из условий $\tilde{\varphi} \in C(\bar{I} \times \bar{J})$, $|\tilde{\varphi}(t, \mu) - x_0| \leq b$. Определим

$$\psi(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t g(\tau, \mu) d\tau, \quad g(t, \mu) := f(t, \tilde{\varphi}(t, \mu), \mu).$$

Функция $g = g(t, \mu)$ непрерывна на $\bar{I} \times \bar{J}$, $\psi(\cdot, \mu) \in C^1(\bar{I})$. Применяя формулу конечных приращений, получаем оценку

$$\begin{aligned} |\psi(t_1, \mu) - \psi(t_2, \mu)| &= |\psi'_t(\xi, \mu)(t_1 - t_2)| = \\ &= |g(\xi, \mu)| \cdot |t_1 - t_2| \leq C|t_1 - t_2|, \quad C = \max_{\Pi} |f|. \end{aligned}$$

Итак, функция $\psi = \psi(t, \mu)$ непрерывна по $t \in \bar{I}$ равномерно по $\mu \in \bar{J}$ и непрерывна по $\mu \in \bar{J}$ при каждом фиксированном $t \in \bar{I}$ (по теореме о непрерывности интеграла по параметру). Следовательно (см., например, [12][с. 136]), она непрерывна по совокупности переменных на компакте $\bar{I} \times \bar{J}$: $\psi \in C(\bar{I} \times \bar{J})$. Это влечет равномерную непрерывность и, как следствие, непрерывность по $\mu \in \bar{J}$ равномерную по $t \in \bar{I}$. По выбору $\delta \in (0, \delta_0)$ сохраняется неравенство $|\psi(t, \mu) - x_0| \leq b$. Остается заметить, что начальное приближение φ_0 удовлетворяет требованиям к $\tilde{\varphi}$.

Сформулируем обобщение на векторный случай

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subseteq \mathbb{R}^{1+n+m}.$$

Если $f \in C^p(D)$, $p \geq 1$, то $\forall (t_0, x_0, \mu_0) \in D$ решение задачи Коши $x = \varphi(t, \mu)$, $\varphi(t_0, \mu) = x_0$, определено в достаточно малом прямоугольнике $|t - t_0| < \delta$, $\|\mu - \mu_0\| = \max |\mu_i - \mu_{i0}| < c$ ($1 \leq i \leq m$) и является вектор-функцией класса C^p в этой области. Для непрерывности достаточно $f, f'_x \in C(D)$. Исследование зависимости от начальных данных проводится формальной заменой переменных $\tilde{t} = t - t_0$, $\tilde{x} = x - x_0$. Величины t_0 , x_0 становятся дополнительными параметрами в правой части уравнения $d\tilde{x}/d\tilde{t} = f(\tilde{t} + t_0, \tilde{x} + x_0, \mu)$, а начальные данные неизменны: $\tilde{x}_0 = 0$. Подробные доказательства изложены в [3, 13, 23].

Метод малого параметра. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3.$$

В области D считаем функции f , f'_x и f'_μ непрерывными. Пусть

$$D = G \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad G \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \mu \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1.$$

Последнее неравенство символически означает, что подразумеваются малые отклонения параметра от «идеального» значения $\mu = 0$. При фиксированных начальных данных $(t_0, x_0) \in G$ решение задачи Коши $x = \varphi(t, \mu)$ ($\varphi(t_0, \mu) = x_0$) определено в некотором прямоугольнике $P: |t - t_0| < \delta, |\mu| < \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$). Имея в виду решение интегрального уравнения, считаем δ и ε такими, что функция $\varphi(t, \mu)$ задана и непрерывна на замыкании \bar{P} . Пучок интегральных кривых $\{(t, \varphi(t)) | t \in \bar{I}, |\mu| < \varepsilon\}$ ($\bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$) находится в пределах области G . При $\mu = 0$ получаем *невозмущенное* решение $x = \varphi(t, 0) = \varphi_0(t)$:

$$\dot{\varphi}_0(t) \equiv f(t, \varphi_0(t), 0), \quad t \in I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \varphi_0(t_0) = x_0.$$

Поставим задачу вычисления функции $\varphi_1(t) = \partial\varphi/\partial\mu|_{\mu=0}$, чтобы оценить скорость изменения решения по параметру. Для поиска соотношения для функции $\varphi_1(t)$ продифференцируем тождество $\partial_t\varphi(t, \mu) \equiv f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ по переменной μ :

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial\mu} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \quad (t \in I, |\mu| < \varepsilon).$$

Поменяем в левой части этого тождества порядок дифференцирования по t, μ и положим $\mu = 0$:

$$\dot{\varphi}_1(t) = A(t)\varphi_1(t) + b_1(t), \quad \varphi_1(t_0) = 0, \quad t \in I,$$

$A(t) := f'_x(t, \varphi_0(t), 0)$, $b_1(t) := f'_\mu(\dots)$. Полученное линейное дифференциальное уравнение называется *уравнением в вариациях*. Функции $A(t)$, $b_1(t)$ непрерывны на I , решение дается формулой

$$\varphi_1(t) = \int_{t_0}^t \exp\{a(t, \tau)\} b_1(\tau) d\tau, \quad a(t, \tau) := \int_{\tau}^t A(s) ds.$$

Ценность результата в том, что для анализа главной линейной части приращения (дифференциала, вариации)

$$\varphi(t, \mu) - \varphi_0(t) \approx \varphi_1(t)\mu, \quad t \in I, \quad |\mu| < \varepsilon,$$

нет необходимости в определении зависимости $\varphi(t, \mu)$.

Замечание 1. Преобразования проведены без должного обоснования. В принятых ограничениях $\varphi \in C^1(P)$ [3, 13, 23], откуда

$$\varphi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu + o(\mu), \quad \varphi_1 = \partial_\mu \varphi|_{\mu=0}, \quad \varphi_1(t_0) = 0.$$

Существование и непрерывность смешанных производных $\partial_t \partial_\mu$, $\partial_\mu \partial_t$ [23] позволяет менять порядок дифференцирования. Тем самым приведенные формальные преобразования правомерны.

Несмотря на замечание, содержащее лишь ссылки на доказательства, функция $\varphi_1(t)$ определена явной формулой. Это позволяет в терминах невязки придать смысл аппроксимации

$$\varphi(t, \mu) \approx \xi(t, \mu) := \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu, \quad t \in I, \quad |\mu| < \varepsilon,$$

подстановкой в исходное уравнение. Уменьшим, если необходимо, прямоугольник P (достаточно уменьшить ε) настолько, чтобы в левую часть уравнения $\dot{x} - f(t, x, \mu) = 0$, которому удовлетворяет тождественно решение $x = \varphi(t, \mu)$, можно было подставить приближение $x = \xi(t, \mu)$ ($t \in I, |\mu| < \varepsilon$). Оценим невязку, воспользовавшись для f формулой Тейлора в форме Пеано:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}_0(t) + \mu \dot{\varphi}_1(t) - f(t, \xi(t, \mu), \mu) = \\ & = \dot{\varphi}_0 + \mu \dot{\varphi}_1 - f|_{\mu=0} - \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mu=0} \varphi_1 - \mu \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} + \nu = \\ & = \dot{\varphi}_0(t) - f|_{\mu=0} + \mu [\dot{\varphi}_1(t) - A(t)\varphi_1(t) - b_0(t)] + \nu(t, \mu) = \nu(t, \mu). \end{aligned}$$

Итак, линейная по параметру μ функция $\xi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu$ ($\xi(t_0, \mu) = x_0$) является решением уравнения $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ с погрешностью $\nu(t, \mu)$. В силу непрерывности f , f'_x и f'_μ функция $\nu(t, \mu)$ непрерывна в прямоугольнике P и $\nu = o(\mu) \forall t$. Более того, $\nu \in C(\bar{P}) \Rightarrow \nu(t, \mu)/\mu \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$) равномерно по $t \in \bar{I}$.

Здесь мы воспользовались следующим результатом: если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то она равномерно непрерывна и $\forall y_0 \in [c, d]$ имеет место равномерная по $x \in [a, b]$ сходимость $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ при $y \rightarrow y_0$ (см.: Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. М.: Физматлит, 2005. Т. 2. С. 257).

Приближение $\varphi(t, \mu) \approx \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu$ позволяет по коэффициенту φ_1 судить о чувствительности решения к малому возмущению параметра μ . В приложениях часто этого достаточно.

Аналогично определяются и коэффициенты при μ^k , $k > 1$ ($\varphi_2 = \partial_\mu^2 \varphi(t, 0)/2, \dots$), когда f достаточно гладкая. При этом в уравнении в вариациях меняется только неоднородность $b_k(t)$. В n -мерном случае $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, а $b_k(t) \in \mathbb{R}^n$. Более сложная теория *сингулярных возмущений*, когда малый параметр при старшей производной, изложена в [28, 29].

Зависимость решения от аддитивного возмущения f .

Рассмотрим два векторных дифференциальных уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \dot{y} = f(t, y) + g(t, y).$$

Вектор-функции f, g считаем непрерывными и липшицевыми по фазовым переменным (f с известной константой L) в заданной области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Фиксируем начальные данные $(t_0, x_0) \in G$ и рассмотрим решения задач Коши на интервале $I = (t_1, t_2)$:

$$x = \varphi(t) \quad (\varphi(t_0) = x_0), \quad y = \psi(t) \quad (\psi(t_0) = x_0), \quad t_0 \in I.$$

В процессе движения о вектор-функции $g(t, \psi(t))$ известна лишь оценка $|g| \leq \sigma = \text{const}$. Здесь и далее используется евклидова норма $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$. Требуется оценить величину $|\varphi(t) - \psi(t)|$. Задача интерпретируется следующим образом: слагаемое g — возмущение правой части, известное лишь в оценочном плане (неучтенные, но влиятельные силы, поправка на «ветер»), требуется оценить величину «рассогласования» траекторий движения.

Обозначим $z(t) = x(t) - y(t)$. Тогда

$$\dot{z} = f(t, x) - f(t, y) - g(t, y), \quad z(t_0) = 0.$$

Домножим это соотношение скалярно на вектор z и воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \langle z, \dot{z} \rangle &= \langle f(t, x) - f(t, y), z \rangle - \langle g, z \rangle, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle z, z \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 = |z| \frac{d|z|}{dt} \leq |f(t, x) - f(t, y)| |z| + |g| |z| \leq \\ &\leq L|x - y| |z| + \sigma |z| = L|z|^2 + \sigma |z|, \quad \frac{d|z|}{dt} \leq L|z| + \sigma, \quad L = \text{const}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство на отрезке времени $[t_0, t]$ с помощью интегрирующего множителя $\exp\{-Lt\}$:

$$\begin{aligned} \exp\{-Lt\} \frac{d|z|}{dt} - \exp\{-Lt\} |z| &\leq \exp\{-Lt\} \sigma, \\ \frac{d}{dt} \left[\exp\{-Lt\} |z| \right] &\leq \exp\{-Lt\} \sigma, \quad |z| \leq \sigma L^{-1} [\exp\{L(t - t_0)\} - 1]. \end{aligned}$$

Если добавить значения $t < t_0$, то $(t - t_0)$ заменится на $|t - t_0|$. Помимо количественной оценки получаем и качественный вывод: на любом отрезке времени $[t_3, t_4] \subset (t_1, t_2)$ рассогласование движений $z(t) = x(t) - y(t)$ будет равномерно сколь угодно мало при достаточно малом значении σ . Имеет место непрерывность по аддитивному функциональному возмущению правой части.

Замечание 2. Вернемся к методу малого параметра. В указанном достаточно малом прямоугольнике \bar{P} функция $f(t, x, \mu)$ липшицева по x (следует из формулы конечных приращений) и

$$\|\nu(\cdot, \mu)\| = \|\nu(\cdot, \mu)\|_{C(\bar{I})} = \max_{|t-t_0| \leq \delta} |\nu(t, \mu)| = \sigma(\mu) = o(\mu).$$

Воспользуемся оценкой рассогласования $|z(t)|$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &\equiv f(t, \varphi, \mu), \quad \dot{\xi} \equiv f(t, \xi, \mu) + \nu(t, \mu), \quad \|\nu\| = \sigma(\mu), \\ &\Rightarrow |\varphi(t, \mu) - \xi(t, \mu)| \leq \sigma(\mu) L^{-1} [\exp\{L|t - t_0|\} - 1]. \end{aligned}$$

Следовательно, помимо приближения $\varphi(t, \mu) \approx \xi(t, \mu)$ по невязке уравнения $\dot{x} - f = 0$ с погрешностью $o(\mu)$, для построенной формально функции $\varphi_1(t)$ имеем (равномерно по $t \in \bar{I}$)

$$\varphi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu + o(\mu) \Rightarrow \varphi_1 = \partial_\mu \varphi|_{\mu=0}, \quad \varphi_1(t_0) = 0.$$

4. ТЕОРЕМА КОШИ О ГОЛОМОРФНОМ РЕШЕНИИ

Метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов восходит к Ньютону. Сходимость рядов в аналитическом случае доказана Коши. Формулировка и доказательство разрешимости начальной задачи для широкого класса уравнений также принадлежат Коши. Позднее его метод последовательных приближений в общей форме разработан Пикаром. Краткий исторический очерк см. в [27].

Рассмотрим в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$ уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Пусть f является *вещественной аналитической*: $f \in C^\omega$. Это означает, что каждая точка $(t_0, x_0) \in G$ обладает окрестностью U_{ab} ($|t - t_0| < a, |x - x_0| < b$), в которой функция f представима сходящимся степенным рядом:

$$f(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} (t - t_0)^i (x - x_0)^j, \quad (t, x) \in U_{ab} \subseteq G.$$

Без ограничения общности для упрощения обозначений можно считать $t_0 = 0, x_0 = 0$ (перенос начала отсчета). По теореме Абеля из абсолютной сходимости степенного ряда $\sum \alpha_{ij} t^i x^j$ в точке (\bar{t}, \bar{x}) ($\bar{t} \neq 0, \bar{x} \neq 0$) следует его сходимость в комплексном *поликруге* $P = \{(t, x) \in \mathbb{C}^2: |t| < |\bar{t}|, |x| < |\bar{x}|\}$. Так что f можно продолжить в некоторую область $D \subseteq \mathbb{C}^2$ (с сохранением значений в вещественной области $G = D \cap \mathbb{R}^2$). В окрестности каждой точки D комплекснозначная функция f комплексных аргументов t, x представима сходящимся степенным рядом. Такие функции называются *голоморфными* в области D . Дифференциальные уравнения в комплексной области — предмет *аналитической теории* дифференциальных уравнений. Далее используем только самые необходимые сведения из комплексного анализа, касающиеся лишь степенных рядов. Напомним, в частности, что внутри поликруга сходимости степенной ряд сходится абсолютно (следовательно, сумма не зависит от порядка суммирования), его можно почленно дифференцировать и интегрировать.

ТЕОРЕМА 4 (теорема Коши о голоморфном решении).

Если $f \in C^\omega(G)$, то для любых начальных данных (t_0, x_0) в области G решение задачи Коши существует. Решение единственно и является голоморфным в некоторой окрестности t_0 .

Доказательству предположим комментарии. В силу $C^\omega \subset C^\infty$ справедлива доказанная выше теорема Пикара. Существование решения задачи Коши понимается в следующем смысле:

$$x = \varphi(t), \quad t \in I = (t_1, t_2) \ni t_0, \quad \varphi \in C^1(I), \quad \dot{\varphi} \equiv f(t, \varphi), \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Локальная единственность: два решения тождественны в некоторой ε -окрестности t_0 . Следствие: решения уравнения (4.1), равные в некоторый момент времени, совпадают на пересечении промежутков своего определения. Существенно новым является то, что в условиях теоремы решение задачи Коши можно представить сходящимся степенным рядом в некоторой δ -окрестности t_0 . Ряд будет сходиться и при комплексных t , $|t - t_0| < \delta$. При достаточно малом $\delta > 0$ сумма ряда будет решением комплексного уравнения $\dot{z} = f(t, z)$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Здесь уместно напомнить *теорему единственности*: если две функции голоморфны в области $U \subseteq \mathbb{C}^n$ и совпадают на открытом подмножестве U , то они тождественны в U .

Подчеркнем локальность утверждения простым примером: $y' = -2x(y + 1)^2$, $y(0) = 0$. Решение $y = -1 + 1/(1 + x^2)$ класса $C^\infty(\mathbb{R})$ этой начальной задачи разлагается в степенной ряд лишь в круге $|x| < 1$ (из-за мнимой единицы).

Доказательство. Доказательство теоремы Коши разобьем на несколько этапов. Для упрощения обозначений сменим начало координат: $(t_0, x_0) = (0, 0)$. По условию теоремы

$$f(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} t^i x^j, \quad |t| < a, \quad |x| < b. \quad (4.2)$$

Формальное решение. Будем искать решение в форме

$$x = \varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i, \quad (4.3)$$

не задаваясь пока вопросом о сходимости степенного ряда. Из нулевых начальных данных получаем $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \beta_0 = 0$, так что суммирование можно начинать с $i = 1$.

Подставим формальный ряд в уравнение (4.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k t^{k-1} = \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} t^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^k \right)^j, \\ t^0: \beta_1 &= \alpha_{00}, \quad t^1: 2\beta_2 = \alpha_{10} + \alpha_{01}\beta_1, \\ t^2: 3\beta_3 &= \alpha_{20} + \alpha_{01}\beta_2 + \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{02}\beta_1^2, \dots\end{aligned}\tag{4.4}$$

Громоздкость выражений быстро нарастает, но можно заметить, что бесконечная система уравнений относительно искомым коэффициентов β_j решается последовательно однозначным образом. Итак, если голоморфное решение задачи Коши существует, то оно определяется единственным образом, так как для сходящихся степенных рядов проделанные операции законны.

Сходимость. Построим *мажорантное* уравнение. Рассмотрим ряд (4.2) для функции f . Возьмем $\bar{t} \in (0, a)$, $\bar{x} \in (0, b)$. Из абсолютной сходимости следует ограниченность членов ряда:

$$|\alpha_{ij} \bar{x}^j \bar{t}^i| \leq M \Rightarrow |\alpha_{ij}| \leq \tilde{\alpha}_{ij} := M(\bar{x}^j \bar{t}^i)^{-1}.$$

Тогда в поликруге $|t| < \bar{t}$, $|x| < \bar{x}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}|f| &\leq \sum |\alpha_{ij}| |t|^i |x|^j \leq \sum \tilde{\alpha}_{ij} |t|^i |x|^j = \\ &= M \sum \left[\frac{|t|}{\bar{t}} \right]^i \left[\frac{|x|}{\bar{x}} \right]^j = M \left(\left[1 - \frac{|t|}{\bar{t}} \right] \left[1 - \frac{|x|}{\bar{x}} \right] \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Здесь просуммировано произведение двух геометрических прогрессий со знаменателями $q_1 = |t|/\bar{t} < 1$ и $q_2 = |x|/\bar{x} < 1$.

Рассмотрим теперь в поликруге $|t| < \bar{t}$, $|x| < \bar{x}$ уравнение

$$\dot{x} = g(t, x) := \sum \tilde{\alpha}_{ij} t^i x^j = M \left(\left[1 - \frac{t}{\bar{t}} \right] \left[1 - \frac{x}{\bar{x}} \right] \right)^{-1}.\tag{4.5}$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, оно интегрируется в элементарных функциях:

$$\left[1 - \frac{x}{\bar{x}}\right] dx = \frac{M\bar{t}}{\bar{t} - t} dt, \quad \frac{x^2}{2\bar{x}} - x - M\bar{t} \ln \left[1 - \frac{t}{\bar{t}}\right] = 0.$$

Интегрирование проводилось с учетом начальных данных $(0, 0)$, которые к тому же выделяют один корень квадратного уравнения по x . Это решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ раскладывается в степенной ряд в окрестности $t_0 = 0$ ($|t| < r$) с коэффициентами $\tilde{\beta}_i$, $i \geq 1$.

В порядке упражнения рекомендуется выписать выражение для $\tilde{\varphi}(t)$ и указать $r > 0$ (значения $\tilde{\beta}_i$ находить не обязательно).

Подстановка $x = \tilde{\varphi}(t)$ в мажорантное уравнение (4.5) дает тождество по t . Коэффициенты $\tilde{\beta}_i$ и $\tilde{\alpha}_{ij}$ отличаются от коэффициентов в представлениях (4.2), (4.3) лишь тильдами в обозначениях. Следовательно, получим ту же систему уравнений (4.4) (только «волнистую»). Покажем, что сходящийся ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\beta}_i t^i = \tilde{\varphi}(t), \quad |t| < r,$$

является мажорирующим для формального ряда (4.3):

$$\beta_1 = \alpha_{00} \Rightarrow |\beta_1| = |\alpha_{00}| \leq \tilde{\alpha}_{00} = \tilde{\beta}_1,$$

$$2|\beta_2| \leq |\alpha_{10}| + |\alpha_{01}||\beta_1| \leq \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{01}\tilde{\beta}_1 = 2\tilde{\beta}_2 \Rightarrow |\beta_2| \leq \tilde{\beta}_2, \dots$$

Следовательно, ряд (4.3) сходится при $|t| < r$ и является искомым решением задачи Коши. Других решений, голоморфных или гладких, которые бы не совпадали в сколь угодно малой окрестности $t_0 = 0$ с функцией $\varphi(t)$, не существует. \square

Теорема позволяет обоснованно пользоваться методом неопределенных коэффициентов, вычисляя для приближенного решения несколько коэффициентов сходящегося ряда (4.3). Доказательство (без упрощения рассуждений троеточиями) в векторном случае см., например, в учебных пособиях [3, 10].

Особые точки. В задачах механики и математической физики часто встречаются линейные уравнения второго порядка

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

$$a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^j, \quad |x| < R.$$

При приведении к нормальному виду (разрешенному относительно старшей производной) делением на $a_2(x)$ могут появиться *особые точки*, в которых по крайней мере одна из функций a_1/a_2 , a_0/a_2 обращается в бесконечность. В некоторых случаях удается найти удачную замену независимой переменной, как, например, в *уравнении Эйлера*:

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \quad a, b = \text{const.}$$

Замена $x = \exp t$ при $x > 0$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами ($x < 0 \Rightarrow x = -\exp t$). В других случаях удается строить решения в форме обобщенных степенных рядов, как для *уравнения Бесселя*:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0, \quad y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k.$$

В общем случае ν, λ комплексные. Ограничиваясь $x > 0$, полагаем по определению $x^\lambda = \exp\{\lambda \ln x\}$. Решения, которые называются *функциями Бесселя*, относятся к так называемым *специальным функциям* математической физики. Им посвящена обширная математическая литература. Изучение решений в окрестности особых точек — предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений* (см. [3, 15, 29]).

5. ЛИНЕЙНЫЕ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + q(t), \quad t \in \bar{I} = [t_1, t_2]. \quad (5.1)$$

В скалярной форме это система n линейных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + q_i(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}$ и вектор-функция $q = \{q_i\}$ непрерывны на отрезке времени \bar{I} . Иными словами, отображения $t \mapsto a_{ij}$, $t \mapsto q_i$ — из класса $C(\bar{I})$. Производные в точках $t_{1,2}$ понимаются как односторонние. Запись линейной системы в форме (5.1) предполагает, что вектор фазовых переменных $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ считается вектором-столбцом: $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Наряду с (5.1) рассмотрим *управляемую систему*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, T] \subseteq \bar{I}. \quad (5.2)$$

Неоднородность $q(t)$ имеет специальную структуру:

$$q(t) = B(t)u, \quad B = \{b_{ij}\} = B_{n \times r}, \quad u = (u_1, \dots, u_r)^\top \in \mathbb{R}^r.$$

Параметры u_i являются *управлениями*. Например, в модели (правда, нелинейной) движения центра масс летательного аппарата (ЛА), представленной во введении, это тяга двигателя, угол атаки, миделево сечение. Линейные системы, как правило, являются результатом линеаризации уравнений движения объекта (функционирования технологического процесса ...) в окрестности заданного режима. Выбор управлений позволяет менять траекторию движения. Можно ставить задачу о выборе наилучшего, *оптимального* управления. Математическая формализация требует точного определения *множества допустимых управлений* $\mathcal{U} = \{u(\cdot)\}$ и *критерия оптимальности* $J = J(u(\cdot))$. Критериями оптимальности в упомянутой задаче о движении центра масс ЛА могут быть: расстояние до заданной точки на поверхности, максимальная высота полета, кинетическая энергия при подлете к заданной точке пространства, время попадания в цель (задача быстрогодействия). В общей форме ставится задача о минимизации *функционала качества*:

$$J(u) = F(x(T)) + \int_{t_0}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \rightarrow \min.$$

Начальные данные (t_0, x_0) заданы либо подчинены определенным ограничениям. Не будем углубляться в теорию управления, а сосредоточимся на описании множества \mathcal{U} и уточнении понятия решения системы (5.2) в соответствии с целями курса ОДУ.

В технике распространены различного рода переключатели, так что допустимыми считаем кусочно непрерывные функции на отрезке управления $[t_0, T]$: компоненты $u_i = u_i(t)$ имеют конечное число разрывов первого рода. Кроме того, возможности управления ограничены. Обычно задается множество допустимых значений: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, t \in [t_0, T]$. Формально не исключая $U = \mathbb{R}^r$, множеством допустимых управлений считаем

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \mid u_i \in KC[t_0, T], u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^r\}. \quad (5.3)$$

Что понимать под решением системы (5.2) при допустимом управлении, если в правой части возможны разрывы (скачки)?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Непрерывную вектор-функцию $x = \varphi(t)$, определенную на промежутке времени $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [t_0, T]$, назовем решением системы (5.2) (на этом промежутке), если при любом фиксированном $s \in \langle \alpha, \beta \rangle$ справедливо равенство*

$$\varphi(t) = \varphi(s) + \int_s^t \{A(\tau)\varphi(\tau) + B(\tau)u(\tau)\}d\tau, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (5.4)$$

Таким образом, за основу принята эквивалентность задач

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

которая использовалась при доказательстве теоремы Пикара (при условии непрерывности функций f, f'_x).

В дальнейшем нас будут интересовать решения системы (5.2) на всем отрезке управления при заданных начальных данных (t_0, x_0) ($x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$). Согласно определению, такое решение $x = \varphi(t)$ является непрерывным на отрезке времени $[t_0, T]$ решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \{A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)\}d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.5)$$

Начальное условие $\varphi(t_0) = x_0$, очевидно, выполняется. Если исключить точки разрыва управления t_1, \dots, t_k , то на множестве

$[t_0, T] \setminus \{t_i\}$ имеем равенство $\dot{\varphi} = A\varphi + Bu$. Так что задача Коши с начальными данными (t_0, x_0) для уравнения (5.2) эквивалентна в этом смысле интегральному уравнению (5.5). При $t = t_i$ траектория движения (непрерывного) может испытывать скачки производной (изломы). Изменение подынтегральной функции в (5.5) в конечном числе точек ($\subseteq \{t_i\}$) не изменит интеграла, поэтому без ограничения общности можно произвольно переопределить значения $u(t_i)$. Обычно доопределяют управления по непрерывности (слева или справа), например,

$$u(t) = u(t+0), \quad t \in [t_0, T), \quad u(T) = u(T-0). \quad (5.6)$$

При такой договоренности считаем $t_i \in (t_0, T)$ ($1 \leq i \leq k$) и, если не исключать из рассмотрения односторонние производные (справа при $t \in [0, T)$ и слева в момент времени T), в силу (5.5) имеем $\dot{x} = Ax + Bu \quad \forall t \in [t_0, T]$. Интегральная форма определения решения позволяет обобщать теорию на более общие классы допустимых управлений, сохраняя, например, лишь требование абсолютной непрерывности решения φ и выполнения равенства $\dot{\varphi} = A\varphi + Bu$ почти всюду на отрезке управления $[t_0, T]$.

Обобщим задачу на нелинейные системы:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad f: \Omega = [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5.7)$$

Отрезок управления $[t_0, T]$ фиксирован, вектор-функция f как минимум непрерывна. Ограничений на фазовый вектор x нет, задание фазовых ограничений $x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n$ существенно усложняет задачу управления. Множество допустимых управлений $\mathcal{U} = \{u(\cdot)\}$ характеризуется требованием

$$u(\cdot) \in KC([t_0, T] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^r)$$

и доопределением значений в точках разрыва первого рода в соответствии с соглашением (5.6). Остается разве лишь конечное число точек разрыва управления $t_i \in (t_0, T)$ ($t_1 < \dots < t_k$).

Прежде чем ставить и решать задачу управления на отрезке $[t_0, T]$, необходимо убедиться, что решения системы (5.7) существуют. Под решением уравнения (5.7) с начальными данными

(t_0, x_0) на отрезке $[t_0, T]$ понимаем такую непрерывную вектор-функцию $x = \varphi(t)$, что выполняется тождество по t

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.8)$$

При необходимости пишут $x = \varphi(t; t_0, x_0, u)$, чтобы отразить зависимость от начальных данных $(t_0, x_0) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ и управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. На множестве $[t_0, T] \setminus \{t_i\}$ выполняется тождество $\dot{\varphi} \equiv f(t, \varphi, u)$. Для $t_i \in (t_0, T)$ равенство сохраняется, если производную $\dot{\varphi}$ понимать правосторонней (при необходимости).

На отрезках времени $[t_i, t_{i+1}]$ ($t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} := T$) можно рассматривать уравнения $\dot{x} = g(t, x) = f(t, x, u(t))$, пытаясь «склеить» из локальных глобальное решение на всем отрезке времени $[t_0, T]$. В общем случае здесь возникает проблема продолжимости локальных решений. Приведем достаточные условия, при выполнении которых гарантируются существование и единственность глобального решения задачи Коши.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C(\Omega)$ и $f \in \text{Lip}_x(\Omega)$:

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| \leq L \|x - y\|, \quad (5.9)$$

$$\forall (t, x, u), (t, y, u) \in \Omega = [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U, \quad L = \text{const.}$$

Тогда $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}$ существует решение задачи Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0, u)$ ($\varphi(t_0) = x_0$), определенное на отрезке $[t_0, T]$. Для любого другого решения $x = \psi(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ ($t \in [t_0, \beta)$, $\psi(t_0) = x_0$) имеем $\varphi(t) \equiv \psi(t)$, $t \in [t_0, \beta)$.

Доказательство. Определим итерационный процесс: $k \geq 0$,

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi^{k+1} = \mathcal{A}\varphi^k, \quad \varphi^{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi^k, u) d\tau. \quad (5.10)$$

Здесь $t \in [t_0, T]$ и в силу отсутствия фазовых ограничений последовательность непрерывных вектор-функций корректно определена (верхний индекс — номер, нижний — для компонент):

$$\varphi^k(t) = (\varphi_1^k, \dots, \varphi_n^k)^\top, \quad \varphi^k \in C[t_0, T] = C_n[t_0, T] = C([t_0, T], \mathbb{R}^n).$$

Остается доказать сходимость $\varphi^k \rightarrow \varphi$ по норме пространства C , т. е. равномерную сходимость на отрезке $[t_0, T]$ ($\varphi^k \rightrightarrows \varphi$).

Рассмотрим следующий функциональный ряд: $t \in [t_0, T]$,

$$\varphi^0 + (\varphi^1 - \varphi^0) + \dots + (\varphi^{k+1} - \varphi^k) + \dots, \quad S_{n+1} = \varphi^n.$$

Для оценок (\leq) норму в \mathbb{R}^n удобно выбрать кубической:

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|\psi\|_C = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in [t_0, T]} |\psi_i(t)|.$$

Оценим члены ряда: $\|\varphi^0\|_C = \|x_0\|$, $\|\varphi^1 - \varphi^0\|_C := Q$,

$$\begin{aligned} \|\varphi^2(t) - \varphi^1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \{f(\tau, \varphi^1, u) - f(\tau, \varphi^0, u)\} d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\{f(\tau, \varphi^1, u) - f(\tau, \varphi^0, u)\}\| d\tau \leq LQ(t - t_0), \\ \|\varphi^3(t) - \varphi^2(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi^2(\tau) - \varphi^1(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq L^2 Q \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau = L^2 Q \frac{(t - t_0)^2}{2} \dots \end{aligned}$$

Методом математической индукции доказывается оценка

$$\|\varphi^{k+1}(t) - \varphi^k(t)\| \leq L^k Q \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \quad k \geq 1, \quad t \in [t_0, T].$$

Получили сходящийся числовой мажорирующий ряд

$$\begin{aligned} \|x_0\| + Q + LQ(T - t_0) + \dots + L^k Q \frac{(T - t_0)^k}{k!} + \dots = \\ = \|x_0\| + Q(1 + L(T - t_0) + \dots) = \|x_0\| + Q \exp\{(T - t_0)L\}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место сходимость $\varphi^k \rightrightarrows \varphi \in C$.

Докажем равномерную сходимость интегралов:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi^k, u) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi, u) d\tau \right\| \leq \\ \leq L \|\varphi^k - \varphi\|_C (T - t_0) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в определении (5.10), получаем неподвижную точку $\varphi(\cdot) = \mathcal{A}\varphi(\cdot)$, т. е. решение $x = \varphi(t; t_0, x_0, u)$ задачи Коши ($\varphi(t_0) = x_0$). Оно определено на всем отрезке $[t_0, T]$.

Единственность докажем от противного: пусть на промежутке $[t_0, \beta)$ определено другое решение $x = \psi(t)$, $\psi(t_0) = x_0$. Доопределим значение $\psi(\beta)$ (если $[t_0, \beta) = [t_0, \beta)$), положив в определении решения (5.8) (при замене $\varphi \rightarrow \psi$) справа $t = \beta$ в интеграле (формально значение $\psi(\tau)$ при $\tau = \beta$ под интегралом можно считать любым). Обозначим $P = \|\varphi - \psi\|_C$, $C = C[t_0, \beta]$, и выполним последовательно оценки при $t \in [t_0, \beta]$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \{f(\tau, \varphi, u) - f(\tau, \psi, u)\} d\tau \right\| \leq \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| d\tau \leq LP(t - t_0), \\ \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t LP(\tau - t_0) d\tau = L^2 P \frac{(t - t_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

По индукции получается оценка

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq PL^k \frac{(t - t_0)^k}{k!} \leq PL^k \frac{\beta^k}{k!} \rightarrow 0.$$

В итоге $\varphi(t) \equiv \psi(t)$, $t \in [t_0, \beta)$ ($\beta \in (t_0, T]$). \square

Результат не изменится, если вместо начальных данных (t_0, x_0) взять набор (t_*, x_*) при фиксированном $t_* \in (t_0, T]$.

Для линейных систем условие Липшица (5.9) выполнено:

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \max_{t \in [t_1, t_2]} \|A(t)\| \cdot \|x - y\|.$$

Норму матрицы берем согласованной с нормой вектора:

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \Rightarrow \|A(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

В линейных системах ОДУ все решения продолжимы на весь промежуток времени, на котором матрица $A(t)$ непрерывна, а неоднородность $q(t)$ имеет конечное число разрывов первого рода (при необходимости эти ограничения можно ослабить).

Глава III

Линейные дифференциальные уравнения

Примем индуктивную схему изложения, используя традиционную механическую терминологию. Общую теорию преимущественно будем излагать для уравнений второго порядка, ориентируясь на второй закон Ньютона, известный из школьного курса физики. С другими приложениями (теплопроводность, диффузия . . .) читатель ознакомится в курсе математической физики. Для линейных дифференциальных уравнений n -го порядка технические выкладки аналогичны.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные понятия и обозначения. Уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0 \quad (1.1)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка*. В линейном «однородном» приближении второй закон Ньютона $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$ запишется в форме

$$\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = 0. \quad (1.2)$$

Независимую переменную $t \in I = (t_1, t_2)$ интерпретируем как время. Коэффициенты $a_i(t)$ считаем непрерывными: $a_i \in C(I)$. При необходимости с привлечением понятия односторонней производной вместо интервала I можно рассматривать промежуток времени $\langle t_1, t_2 \rangle$, в частности, отрезок $\bar{I} = [t_1, t_2]$.

Стандартной заменой $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ (переход к фазовым переменным «положение-скорость») уравнение сводится к нор-

мальной (разрешенной относительно производных) системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2.$$

Общий порядок системы равен двум. В главе I представлены методы интегрирования скалярных уравнений первого порядка, так что целесообразно рассмотреть вопрос о понижении порядка. Для решений, не принимающих нулевых значений (на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq I$), можно сделать замену $y = \dot{x}/x$. Тогда $\dot{y} = \ddot{x}/x - (\dot{x}/x)^2 = \ddot{x}/x - y^2$ и после деления (1.2) на x получаем уравнение Риккати $\dot{y} + y^2 + a_1(t)y + a_0(t) = 0$. Это скалярное дифференциальное уравнение первого порядка, но нелинейное и в общем случае в квадратурах не интегрируется. Порядок исходного уравнения можно также понизить, если известно частное решение $\tilde{x}(t) \neq 0$ ($t \in \langle \alpha, \beta \rangle$). Замена $x = \tilde{x}(t)z$ приводит к однородному линейному уравнению вида $\dot{z} + a(t)z = 0$. Новая замена $w = \dot{z}$ понижает порядок, и уравнение интегрируется.

При произвольных вещественных начальных условиях

$$x(t_0) = x_0 = x_1^0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 = x_2^0 \quad (t_0 \in I)$$

соответствующее решение задачи Коши $x = \varphi(t)$ существует, единственно и продолжимо на весь интервал I . В дальнейшем под решением понимаем продолженное на I (полное) решение. Из существования производной $\dot{\varphi}(t)$ следует её непрерывность:

$$\ddot{\varphi}(t) = -a_1(t)\dot{\varphi}(t) - a_0(t)\varphi(t), \quad a_i \in C(I) \Rightarrow \varphi \in C^2(I).$$

Обобщение на случай произвольного $n > 2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = -a_0x_1 - \dots - a_{n-1}x_{n-1}, \\ \varphi^{(n)} &= -a_{n-1}\varphi^{(n-1)} - \dots - a_0\varphi, \quad a_i \in C(I) \Rightarrow \varphi \in C^n(I). \end{aligned}$$

При построении общей теории недостаточно ограничиться функциями с вещественными значениями, поэтому далее допускаем комплекснозначность функций $a_j: I \rightarrow \mathbb{C}$. Независимая переменная t остается вещественной. Развитие на случай $t \in \mathbb{C}$

составляет предмет *аналитической теории* дифференциальных уравнений. Понятия производной и интеграла от комплекснозначной функции $x(t) = u(t) + iv(t)$ ($u = \operatorname{Re} x$, $v = \operatorname{Im} x$) вещественного аргумента определяются естественным образом:

$$\dot{x}(t) = \dot{u}(t) + i\dot{v}(t), \quad \int x(t) dt = \int u(t) dt + i \int v(t) dt.$$

В общем случае, когда коэффициенты $a_j \in C(I \rightarrow \mathbb{C})$ и начальные данные $x^{(s-1)}(t_0) = x_s^0 \in \mathbb{C}$ ($1 \leq s \leq n$), решение уравнения (1.1) также комплекснозначно: $\varphi \in C^n(I \rightarrow \mathbb{C})$. Комплексное уравнение сводится к двум вещественным. Для этого следует выделить вещественные (Re) и мнимые (Im) части функций $a_j(t)$, $x(t)$ и приравнять к нулю Re и Im левой части уравнения.

Приведем указанные выкладки при $n = 2$:

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \quad x = u + iv, \quad a_j = \alpha_j + i\beta_j \Rightarrow$$

$$\ddot{u} + i\ddot{v} + (\alpha_1 + i\beta_1)(\dot{u} + i\dot{v}) + (\alpha_0 + i\beta_0)(u + iv) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \alpha_1\dot{u}(t) - \beta_1\dot{v}(t) + \alpha_0u(t) - \beta_0v(t) = 0 \\ \ddot{v}(t) + \beta_1\dot{u}(t) + \alpha_1\dot{v}(t) + \beta_0u(t) + \alpha_0v(t) = 0, \end{cases}$$

$$u_1 = u(t), \quad u_2 = \dot{u}(t), \quad v_1 = v(t), \quad v_2 = \dot{v}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \beta_0 & -\alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_0 & -\alpha_0 & -\beta_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Излагаемые ниже общие положения теории линейных уравнений справедливы как в вещественном, так и в комплексном случаях (но независимая переменная $t \in \mathbb{R}$). По умолчанию подразумеваем общий комплекснозначный случай, а \mathbb{R} -уточнения будем приводить по мере необходимости.

Перейдем к лаконичной *операторной* форме записи уравнения (1.1). Для этого введем символ $D = d/dt$. Его можно рассматривать как отображение (оператор). Дифференцируемой функции $\psi(t)$ ставится в соответствие её производная:

$$D: \psi \mapsto \dot{\psi}, \quad D\psi = \dot{\psi} \quad ((D\psi)(t) = \dot{\psi}(t), \quad t \in I).$$

Степень оператора дифференцирования определяется как композиция: $D^k = D \circ \dots \circ D = d^k/dt^k$. При этом $D^0 = \text{id}$ — единичный оператор, для которого $D^0\psi = \psi$. Символ D^0 в выкладках обычно опускают. Этот удобный формализм позволяет переписать уравнение (1.1) в компактном виде:

$$\mathcal{L}(D)x = 0, \quad \mathcal{L}(D) := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0. \quad (1.3)$$

Уточним, как следует понимать уравнение (1.3). Если n раз дифференцируемая функция $\varphi(t)$ является решением (полным) уравнения (1.1), то $\varphi \in C^n(I)$. В связи с этим ограничим область определения оператора $\mathcal{L}(D)$ классом n раз непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, $\mathcal{L}(D): C^n(I) \rightarrow C(I)$,

$$\psi \in C^n(I) \Rightarrow \mathcal{L}(D)\psi = \psi^{(n)} + a_{n-1}\psi^{(n-1)} + \dots + a_0\psi \in C(I).$$

Функция ψ понимается как элемент функционального пространства. Когда это необходимо подчеркнуть, используется обозначение $\psi(\cdot)$, чтобы отличить функцию от числа $\psi(t)$ — значения функции $\psi = \psi(\cdot)$ в точке $t \in I$. Дифференциальное уравнение (1.3) можно воспринимать как операторное:

$$\mathcal{L}(D)x(\cdot) = x^{(n)}(\cdot) + a_{n-1}(\cdot)x^{(n-1)}(\cdot) + \dots + a_0(\cdot)x(\cdot) = 0.$$

Под его решением понимается элемент $\varphi \in C^n(I)$, который переводится оператором $\mathcal{L}(D)$ в нуль. Нули линейных пространств обозначаем одним символом. Так что нуль в правой части уравнения (1.3) означает функцию, тождественно равную нулю на рассматриваемом интервале времени I ($0 \in C(I)$). В более подробной записи $[\mathcal{L}(D)x(\cdot)](t) \equiv 0$ ($t \in I$), но в дальнейшем будем избегать излишней детализации в обозначениях.

Пространство решений. Множество решений однородного уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$ образует линейное пространство, т. е. линейная комбинация решений является решением. Это следует из линейности оператора дифференцирования. Формально

$$\mathcal{L}(D)(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\mathcal{L}(D)\varphi_1 + \mu\mathcal{L}(D)\varphi_2 = 0.$$

Здесь $\varphi_{1,2}$ — произвольные решения, а λ, μ — произвольные числа. Рассматриваем комплексный случай: $a_j \in C(I \rightarrow \mathbb{C})$, $\varphi_j: I \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, \mathbb{R} -версию утверждений приведем позже.

Итак, $\{\varphi\}$ является линейным подпространством $C^n(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функции $\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)$ называются линейно независимыми на интервале I , если справедливо следствие*

$$c_1\psi_1(t) + \dots + c_m\psi_m(t) \equiv 0 \ (t \in I) \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Линейная комбинация функций тождественно равна нулю на I только тогда, когда равны нулю все коэффициенты c_j (которые в определении подразумеваются константами из \mathbb{C}). В противном случае функции ψ_j *линейно зависимы* (по определению) на рассматриваемом интервале времени. При этом по крайней мере одну из функций ψ_j можно представить линейной комбинацией остальных. Эти понятия аналогичны линейной независимости (зависимости) векторов из курса линейной алгебры. Пространство $C^n(I)$ как линейное бесконечномерно: можно указать любое количество линейно независимых элементов. В качестве примера укажем степенные функции t^k , $k \in \mathbb{N}$. Если приравнять к нулю линейную комбинацию любого конечного числа таких функций, то получим, что у полинома (p) имеется континуум различных корней $t \in I$. В случае $\exists c_\nu \neq 0$ ($p \neq 0$) их может быть только конечное число, откуда заключаем, что все числовые коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

Ближайшая цель — доказать, что линейное подпространство $\mathcal{S} = \{\varphi\} \subset C^n(I)$ решений однородного дифференциального уравнения конечномерно (точнее, n -мерно).

ТЕОРЕМА 1. *В множестве решений \mathcal{S} можно выбрать n линейно независимых элементов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, таких, что любое решение $\varphi \in \mathcal{S}$ представимо их линейной комбинацией:*

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \quad t \in I, \quad c_j \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Доказательство. С целью упрощения обозначений ограничимся $n = 2$. Фиксируем произвольные линейно независимые векторы $b^1, b^2 \in \mathbb{C}^2$ и начальный момент времени $t_0 \in I$. Верхний

индекс означает номер: $b^j = (b_1^j, b_2^j)^\top$. Определим решения φ_1, φ_2 с начальными данными b^1, b^2 : $(\varphi_j(t_0), \dot{\varphi}_j(t_0)) = (b_1^j, b_2^j)$.

Покажем, что эти решения линейно независимы на интервале своего определения I . Составим в соответствии с определением линейную комбинацию и приравняем её нулю:

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0, \quad t \in I, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Дифференцируя это тождество (по $t \in I$) в точке $t = t_0$, получим

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) = 0, \quad c_1\dot{\varphi}_1(t_0) + c_2\dot{\varphi}_2(t_0) = 0.$$

В векторно-матричной записи имеем

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \dot{\varphi}_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы состоят из компонент базисных в \mathbb{C}^2 векторов b^1, b^2 . Следовательно, матрица неособая и решением однородной системы линейных алгебраических уравнений является только тривиальный набор $c_1 = c_2 = 0$.

Покажем теперь, что решения φ_1, φ_2 образуют базис линейного пространства \mathcal{S} . Линейная независимость доказана, остается доказать представимость любого решения их линейной комбинацией. Рассмотрим произвольное решение φ уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$. Дифференцируем φ в момент времени t_0 и образуем вектор b с компонентами $b_1 = \varphi(t_0)$, $b_2 = \dot{\varphi}(t_0)$. Фиксируем коэффициенты c_j разложения b по базису: $b = c_1b^1 + c_2b^2$. Функция $\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ является решением дифференциального уравнения как линейная комбинация решений. По построению вектором начальных данных при $t = t_0$ будет b :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c_1b^1 + c_2b^2 = b \quad (t = t_0).$$

Следовательно, у решений φ и ψ одинаковые начальные данные. По теореме единственности заключаем, что $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ на интервале I , т. е. выполнено представление (1.4). \square

Доказательство для произвольного $n > 2$ сложнее лишь в обозначениях. Вместо b^1, b^2 берем базис $b^1, \dots, b^n \in \mathbb{C}^n$. Базисные решения $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ определяем начальными условиями

$$(\varphi_s(t_0), \dot{\varphi}_s(t_0), \dots, \varphi_s^{(n-1)}(t_0))^T = b^s, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Эти решения линейно независимы, и их линейные комбинации образуют множество \mathcal{S} . Тем самым линейное пространство решений однородного уравнения n -мерно: $\dim \mathcal{S} = n$.

Базис линейного пространства \mathcal{S} называется *фундаментальной системой решений*. Из доказательства теоремы следует, что фундаментальных систем бесконечно много. Функция

$$x = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad (t \in I)$$

называется *общим решением* линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$: при любых $c_j \in \mathbb{C}$ получаем решение, и любое решение представимо в такой форме. Аргументом общего решения является набор переменных t, c_1, \dots, c_n .

Матрица Вронского (1776–1853). Исследование линейной независимости (зависимости) решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на интервале времени удобно проводить с помощью *матрицы Вронского*

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

Определитель $w(t) = \det W(t) = |W(t)|$ матрицы Вронского называется *вронскианом*. Если решения φ_j зависимы, то выполняется тождество $w(t) \equiv 0$. Действительно, дифференцируя $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0$ ($t \in I, \exists c_\nu \neq 0$) $(n-1)$ раз, получаем в матричной записи $W(t)c \equiv 0$, где $c = (c_1, \dots, c_n)^T \neq 0$. Следовательно, столбцы $W(t)$ линейно зависимы и $w(t) \equiv 0$.

Этот результат обобщается на любые функции, не обязательно решения дифференциального уравнения (1.1) (лишь бы матрица $W(t)$ была определена). Если же $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ решения, то

справедливо обратное утверждение и даже его усиление: если хотя бы при одном $t = t_0$ вронскиан равен нулю, то решения линейно зависимы (и тогда как следствие $w(t) \equiv 0$).

Докажем утверждение: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}, w(t_0) = 0 \Rightarrow w(t) \equiv 0$. Условие $w(t_0) = 0$ означает линейную зависимость столбцов матрицы $W(t_0)$ (и её строк). Рассмотрим столбцы как векторы начальных данных для решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ при $t = t_0$. Поскольку в силу зависимости столбцов $W(t_0)c = 0$ для некоторого ненулевого вектора $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, то решение $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ имеет нулевой вектор начальных данных при $t = t_0$. Действительно, последовательное дифференцирование линейной комбинации $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ по t дает в матричной записи вектор $W(t)c$. При $t = t_0$ получаем нулевые начальные данные для φ . Тожждественно равное нулю решение, естественно, тоже обладает таким свойством. По теореме единственности $\varphi(t) \equiv 0$, т. е. решения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы ($\exists c_\nu \neq 0$).

Подведем некоторый итог текущих рассуждений. Линейную независимость (зависимость) набора n решений можно установить, вычислив вронскиан в произвольный момент времени $t_* \in I$: $w(t_*) \neq 0$ означает независимость, $w(t_*) = 0$ — зависимость. Система $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ фундаментальна (базис решений) тогда и только тогда, когда она линейно независима. Фундаментальность по определению влечет независимость. Независимость дает $w(t_0) \neq 0$, что означает независимость столбцов матрицы $W(t_0)$. Эти столбцы суть наборы начальных данных для решений φ_j в момент времени t_0 , поэтому решения φ_j образуют базис \mathcal{S} (см. доказательство представления (1.4)).

Формула Лиувилля. Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть заданы такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$, что вронскиан $w(t) \neq 0 \forall t \in I$. Можно ли построить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого пара φ_1, φ_2 образует фундаментальную систему решений? Поскольку $\dim \mathcal{S} = n$, то ограничимся уравнением второго порядка (1.2). Подставляя функции φ_1, φ_2 , получим линейную алгебраическую систему

уравнений для определения коэффициентов a_0, a_1 :

$$\begin{cases} a_1 \dot{\varphi}_1 + a_0 \varphi_1 = -\ddot{\varphi}_1 \\ a_1 \dot{\varphi}_2 + a_0 \varphi_2 = -\ddot{\varphi}_2 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}_1 \\ -\ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы — транспонированная матрица Вронского $W(t)$, так что её определитель совпадает с вронскианом $w(t)$. По формулам Крамера (работоспособным при небольших n) искомые коэффициенты определяются единственным образом:

$$a_0 = w^{-1} \begin{vmatrix} -\ddot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_1 \\ -\ddot{\varphi}_2 & \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 = w^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\ddot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & -\ddot{\varphi}_2 \end{vmatrix}, \quad a_j \in C(I).$$

Эти соотношения, в частности, можно рассматривать как связь между различными фундаментальными системами.

Определитель матрицы имеет геометрический смысл ориентированного объема параллелепипеда (при $n = 2$ — площадь параллелограмма), натянутого на векторы-столбцы. Столбцами матрицы Вронского являются фазовые векторы. С прикладной, «гидродинамической», точки зрения важен вопрос об изменении фазового объема с течением времени. Вычислив скорость изменения вронскиана $\dot{w} = \varphi_1 \ddot{\varphi}_2 - \varphi_2 \ddot{\varphi}_1$, замечаем, что $\dot{w} = -a_1 w$. Интегрирование этого линейного уравнения дает

$$w(t) = w(t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right\}, \quad t \in I \quad (1.5)$$

($t_0 \in I$ произвольное фиксированное). Это и есть формула Лиувилля. К её обобщению для $n > 2$ вернемся в следующей главе. Трудоемкую операцию вычисления определителя (при больших n) достаточно выполнить лишь единожды. Из формулы следует, что либо $w(t) \equiv 0$, либо $w(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Остановимся на частном случае, когда $a_1(t) \equiv 0$. В механической терминологии: силой трения, зависящей от скорости \dot{x} , можно пренебречь. Тогда по формуле Лиувилля выполняется равенство $w(t) = C = \text{const}$, $t \in I$. Пусть известно решение $x = \varphi_1(t) \neq 0 \forall t \in I$ (или $t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset I$). Тогда

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix} = C \Rightarrow \dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} \varphi_2 = \frac{C}{\varphi_1}.$$

Интегрируя это линейное относительно φ_2 уравнение первого порядка, получаем отличное от φ_1 частное решение исходного уравнения $\ddot{x} + a_0(t)x = 0$ (проверяется подстановкой при $C = 1$):

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int_{t_0}^t \varphi_1^{-2}(\tau) d\tau, \quad t \in I \quad (t \in \langle \alpha, \beta \rangle).$$

Интеграл не равен константе, так как его производная (по верхнему пределу) равна $1/\varphi_1^2 > 0$. Следовательно, пара φ_1, φ_2 линейно независима и образует фундаментальную систему.

В заключение параграфа остановимся на вещественном случае. В приведенных выше рассуждениях специфика \mathbb{C} (по сравнению с \mathbb{R}) не использовалась, поэтому множество решений линейного однородного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами и вещественными начальными данными является вещественным n -мерным линейным пространством. Фундаментальную систему образуют любые n линейно независимых решений (над полем \mathbb{R} , $c_i \in \mathbb{R}$). Достаточно задать n векторов начальных данных (в произвольный момент времени $t_0 \in I$), которые образуют базис \mathbb{R}^n . Линейная независимость n -мерных векторов-столбцов $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots)^T$ для базисных решений сохраняется и при $t \neq t_0$ ($w(t) \neq 0 \forall t \in I$).

2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перейдем к изучению неоднородного линейного уравнения

$$\mathcal{L}(D)x = f, \quad a_j, f \in C(I \rightarrow \mathbb{C}). \quad (2.1)$$

В более подробной записи:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = f(t), \quad t \in I = (t_1, t_2).$$

Подставим два произвольных решения φ_1, φ_2 в (2.1) и вычтем одно уравнение из другого. Получим $\mathcal{L}(D)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, т. е. разность двух решений неоднородного уравнения является решением однородного, поэтому множество решений (2.1) описывается формулой (*общим решением*)

$$x = x_*(t) + c_1\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t), \quad t \in I, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Здесь x_* — произвольное фиксированное (частное) решение, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$. Аргументами общего решения являются время t и произвольные постоянные c_j . Начальные данные $x(t_0) = x_1^0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$ однозначно определяют значения c_j . Действительно, последовательно дифференцируя общее решение $(n-1)$ раз при $t = t_0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно c_1, \dots, c_n . Матрицей системы является невырожденная матрица Вронского $W(t_0)$: $W(t_0)c = x^0$ ($\square x_*^0 = 0$). Заменяя в общем решении вектор произвольных постоянных $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$ на его выражение $c = W^{-1}(t_0)x^0$ через начальные данные, получаем представление общего решения в *форме Коши*. В частности, если базисные решения φ_j определить начальными векторами $e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$, то $W(t_0) = E_{n \times n}$ и вектор произвольных постоянных c имеет смысл вектора начальных данных при $t = t_0$.

В рамках параграфа считаем, что φ_j известны. Тогда остается предложить способ поиска какого-либо частного решения.

Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных). В выкладках ограничимся $n = 2$. Общим решением однородного уравнения является линейная комбинация $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$. «Раскрепостим» константы c_j и будем искать частное решение в форме

$$x_*(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t), \quad t \in I.$$

Для последующей подстановки в уравнение вычислим производную:

$$\dot{x}_* = \dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 + c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2.$$

Дальнейшее дифференцирование приведет к появлению \ddot{c}_j , что соответствует порядку исходного уравнения. Чтобы этого не произошло, примем ограничение на выбор $c_j(t)$: $\dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 = 0$. Такая «вольность» допустима, поскольку ищем одно решение и можем распоряжаться двумя пока произвольными функциями $c_j(t)$. Вычислим теперь вторую производную:

$$\ddot{x}_* = \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 + c_1\ddot{\varphi}_1 + c_2\ddot{\varphi}_2, \quad t \in I.$$

Подставляем x_* , \dot{x}_* , \ddot{x}_* в исходное уравнение $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f$:

$$\begin{aligned} & \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 + c_1\ddot{\varphi}_1 + c_2\ddot{\varphi}_2 + \\ & + a_1(c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2) + a_0(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = f. \end{aligned}$$

Заметим, что сумма слагаемых в левой части, начиная с третьего, представима в форме $c_1\mathcal{L}(D)\varphi_1 + c_2\mathcal{L}(D)\varphi_2$. Эта комбинация равна нулю, поскольку φ_j — решения однородного уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$. Остается соотношение $\dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 = f$. Вместе с указанным выше ограничением получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно производных $\dot{c}_j(t)$:

$$\begin{cases} \dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 = 0 \\ \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{c}_2\dot{\varphi}_2 = f \end{cases} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрица системы — матрица Вронского $W(t)$. Поскольку φ_j — линейно независимые решения однородного уравнения, то вронскиан $w(t) = \det W(t) \neq 0 \forall t \in I$. Следовательно, функции $\dot{c}_j(t)$ определяются однозначно, например, по формулам Крамера:

$$\dot{c}_1 = w^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ f & \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix} = -\frac{f\varphi_2}{w}, \quad \dot{c}_2 = w^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \dot{\varphi}_1 & f \end{vmatrix} = \frac{f\varphi_1}{w}.$$

Так как нас интересует частное решение, то в качестве $c_1(t)$, $c_2(t)$ можно взять интегралы с переменным верхним пределом t от правых частей равенств. Нижний предел фиксируем произвольным ($t_0 \in I$). В итоге получаем следующее представление общего решения неоднородного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} x = & -\varphi_1(t) \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)\varphi_2(\tau)}{w(\tau)} d\tau + \varphi_2(t) \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)\varphi_1(\tau)}{w(\tau)} d\tau + \\ & + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \quad t \in I, \quad c_j \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Общий случай $n > 2$ рассматривается аналогично. Ищем частное решение в форме

$$x_*(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t), \quad t \in I.$$

Последовательно дифференцируем, приравнявая сумму слагаемых, содержащих производные \dot{c}_j , к нулю. Поскольку искомым функций $c_j(t)$ n штук, то дифференцируем $(n - 1)$ раз (имеется исходное уравнение, нужно еще $(n - 1)$). Аналогично (2.2) получаем систему линейных алгебраических уравнений для $\dot{c}_j(t)$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

Определитель $w(t) = \det W(t) \neq 0$, так что функции $\dot{c}_j(t)$ определяются однозначно. После их интегрирования получаем искомые коэффициенты $c_j(t)$ и частное решение $x_*(t)$.

Метод Коши. Рассмотрим для линейного однородного уравнения $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ начальные условия $x(\tau) = 0$, $\dot{x}(\tau) = 1$. Здесь $\tau \in I$ считаем параметром, играющим роль переменного момента времени t_0 , в который задаются начальные данные. Естественно, решение задачи Коши будет зависеть от этого параметра: $x = \varphi(t, \tau)$. Для определения постоянных (по отношению к переменной t) в общем решении получаем систему

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(\tau) + c_2\varphi_2(\tau) = 0 \\ c_1\dot{\varphi}_1(\tau) + c_2\dot{\varphi}_2(\tau) = 1 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Она однозначно разрешима относительно $c_j = c_j(\tau)$, так что в итоге получаем $\varphi(t, \tau) = c_1(\tau)\varphi_1(t) + c_2(\tau)\varphi_2(t)$. Фиксируем произвольное $t_0 \in I$ и убедимся в том, что частное решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}(D)x = f$ можно задать формулой

$$x_*(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in I. \quad (2.5)$$

По построению $\varphi(\cdot, \tau) \in C^2(I)$ как линейная комбинация решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ при фиксированном τ . При каждом t функция $\varphi(t, \cdot)$ класса C^1 по $\tau \in I$ (достаточно явно выписать решение $c_j(\tau)$ системы (2.4) по формулам Крамера), поэтому линейная

комбинация $\varphi(t, \tau) = c_1(\tau)\varphi_1(t) + c_2(\tau)\varphi_2(t)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных в квадрате $I \times I$. Это же относится и к частной производной $\partial\varphi/\partial t$, которую будем обозначать $\dot{\varphi}(t, \tau)$ (точки как символы дифференцирования будем относить к первому аргументу). По построению

$$\varphi(t, t) = \varphi(\xi, \xi) = \dots = 0, \quad \dot{\varphi}(t, t) = \dot{\varphi}(\zeta, \zeta) = \dots = 1.$$

Указанные свойства функции $\varphi(t, \tau)$ достаточны для справедливости приводимых ниже выкладок. Обратим внимание на то, что переменная t , по которой будет проводиться дифференцирование, является переменным верхним пределом и входит в подынтегральную функцию представления (2.5). Подходящая формула из курса математического анализа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx &= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \\ &+ f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y). \end{aligned}$$

Теперь проведем подстановку интеграла в исходное уравнение $\mathcal{L}(D)x = f$, предварительно вычислив производные:

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= \varphi(t, t)f(t) + \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad \varphi(t, t) = 0, \\ \ddot{x}_*(t) &= \dot{\varphi}(t, t)f(t) + \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad \dot{\varphi}(t, t) = 1, \\ f(t) + \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}f d\tau + a_1(t) \int_{t_0}^t \dot{\varphi}f d\tau + a_0(t) \int_{t_0}^t \varphi f d\tau &= \\ &= f(t) + \int_{t_0}^t [\ddot{\varphi} + a_1\dot{\varphi} + a_0\varphi] f d\tau = f(t). \end{aligned}$$

Квадратная скобка равна нулю, поскольку φ — решение однородного уравнения. Итак, непосредственно убедились, что $x_*(t)$ является частным решением. При этом $x_*(t_0) = 0$, $\dot{x}_*(t_0) = 0$.

В общем случае $n > 2$ функция $\varphi(t, \tau)$ определяется задачей

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x &= 0, \quad t \in I, \\ x(t) = \dots = x^{(n-2)}(t) &= 0, \quad x^{(n-1)}(t) = 1, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Формула (2.5), определяющая частное решение с нулевыми начальными данными при $t = t_0$, остается без изменений.

Формально метод Коши выглядит более громоздким, поскольку начальную задачу нужно решать с континуальным параметром $\tau \in I$. В приложениях часто f имеет смысл внешней силы (нагрузки). Если приходится постоянно рассчитывать одну и ту же конструкцию, но при постоянно меняющихся внешних воздействиях, то удобно найти $\varphi(t, \tau)$ «раз и навсегда», используя затем формулу (2.5) для частного решения.

Приведенные выше рассуждения и выкладки не нуждаются в уточнении \mathbb{R} -версии, никаких существенных изменений.

3. УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Как обычно, начнем с $n = 2$:

$$\mathcal{L}(D)x = f(t), \quad \mathcal{L}(D) = D^2 + a_1D + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad f \in C(I). \quad (3.1)$$

Однородное уравнение. Полагаем $f \equiv 0$, $I = \mathbb{R}$. Требуется построить фундаментальную систему решений φ_1, φ_2 . Общим решением будет линейная комбинация $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ с произвольными постоянными $c_j \in \mathbb{C}$. Следуя Эйлеру, ищем решение в форме $\varphi(t) = \exp\{\lambda t\}$. После подстановки в уравнение $\mathcal{L}(D)x = 0$ и сокращения на экспоненту, получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D)e^{\lambda t} &= (D^2 + a_1D + a_0)e^{\lambda t} = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = \\ &= \mathcal{L}(\lambda)e^{\lambda t} = 0, \quad t \in I \Rightarrow \mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Итак, функция $\varphi(t) = \exp\{\lambda t\}$ будет решением линейного однородного дифференциального уравнения, если число λ является корнем *характеристического полинома* $\mathcal{L}(\lambda)$. Полином $\mathcal{L}(\lambda)$ формально получается заменой в операторе $\mathcal{L}(D)$ производных D^k на степень λ^k . Проанализируем возможные варианты.

1°. Пусть корни λ_1, λ_2 характеристического полинома различны. Тогда имеем два решения $\varphi_j(t) = \exp\{\lambda_j t\}$. Проверим,

что они линейно независимы. Для этого вычислим вронскиан:

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{\dots} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение дается формулой

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in I = \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

2°. Пусть корень кратный: $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, $\mathcal{L}(\lambda) = (\lambda - \mu)^2$. Заметим, что непосредственно проверяемое равенство

$$\mathcal{L}(D)e^{\lambda t} = \mathcal{L}(\lambda)e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

является тождеством по переменным (t, λ) . Смешанные производные любого порядка от $\exp\{\lambda t\}$ непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования. Дифференцируем тождество (3.2) по λ , меняя производные по t и λ местами в левой части:

$$\mathcal{L}(D)te^{\lambda t} \equiv \mathcal{L}'(\lambda)e^{\lambda t} + \mathcal{L}(\lambda)te^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Поскольку $\lambda = \mu$ — кратный корень полинома $\mathcal{L}(\lambda)$, то в силу $\mathcal{L}'(\lambda) = 2(\lambda - \mu)$ число μ будет и корнем $\mathcal{L}'(\lambda)$. Тогда из (3.3) заключаем, что $\mathcal{L}(D)[t \exp\{\mu t\}] = 0$ ($t \in \mathbb{R}$), т. е. помимо функции $\varphi_1(t) = \exp\{\mu t\}$ решением является и $\varphi_2(t) = t \exp\{\mu t\}$.

Для доказательства базисности φ_j составим линейную комбинацию и приравняем её к нулю: $c_1 \exp \mu t + c_2 t \exp \mu t \equiv 0$. Сокращая экспоненту, получаем $c_1 + c_2 t \equiv 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. Итак, общее решение в случае кратного корня имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Неоднородное уравнение. При $f \not\equiv 0$ общее решение имеет вид $x = x_*(t) + c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$. Здесь $x_*(t)$ — какое-либо частное решение, φ_1, φ_2 — линейно независимые решения однородного уравнения, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Если $I \subset \mathbb{R}$, то φ_j будут базисом и на I . Для поиска x_* применимы общие методы Лагранжа и Коши. Дополним этот арсенал методом неопределенных коэффициентов, когда $f(t)$ квазиполином:

$$f(t) = p_1(t)e^{\sigma_1 t} + \dots + p_s(t)e^{\sigma_s t}, \quad t \in I = \mathbb{R}, \quad \sigma_j \in \mathbb{C}.$$

Функции $p_j(t)$ являются полиномами. Для линейных уравнений справедлив *принцип суперпозиции*. Если найдены решения ψ_j уравнений $\mathcal{L}(D)x = f_j$ ($1 \leq j \leq s$), то их сумма $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_s$ будет решением уравнения $\mathcal{L}(D)x = f_1 + \dots + f_s$. В механических терминах: в линейном приближении сумме внешних сил соответствует сумма движений. Это позволяет сосредоточиться на варианте только одного слагаемого $f(t) = p(t) \exp\{\sigma t\}$.

Вначале разберем *нерезонансный* случай, когда $\mathcal{L}(\sigma) \neq 0$: показатель экспоненты в f не является корнем характеристического полинома. При этом здесь резонанс выяснится чуть позже при изложении основ теории колебаний.

Будем искать частное решение $x_*(t)$ в таком же виде, что и $f(t)$: $x_*(t) = q(t) \exp\{\sigma t\}$, $q(t)$ — полином. После подстановки в уравнение $\mathcal{L}(D)x = f$ и сокращения экспоненты, получаем

$$\ddot{q} + [2\sigma + a_1]\dot{q} + [\sigma^2 + a_1\sigma + a_0]q \equiv \ddot{q} + \mathcal{L}'(\sigma)\dot{q} + \mathcal{L}(\sigma)q = p. \quad (3.4)$$

Заметим, что коэффициентом при $q(t)$ служит $\mathcal{L}(\sigma) \neq 0$. Возьмем полином $q(t)$ с неопределенными коэффициентами той же степени, что и $p(t)$: $\deg q = \deg p = m$. Старший коэффициент q_m отличается лишь множителем $\mathcal{L}(\sigma)$ от старшего коэффициента p_m и находится однозначно. Далее учтем, что производная понижает степень полинома, «перебрасывая» коэффициенты к меньшим степеням t . Следовательно, при известном уже q_m , приравнивая выражения при t^{m-1} в соотношении (3.4), получим $q_{m-1}\mathcal{L}(\sigma) = p_{m-1} + \gamma(q_m)$. Действуя последовательно, находим из линейных соотношений все коэффициенты полинома $q(t)$. Итак, в нерезонансном случае ($\mathcal{L}(\sigma) \neq 0$) частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов в той же форме, что и f : $x_*(t) = q(t) \exp\{\sigma t\}$, $\deg q = \deg p$.

Перейдем к *резонансному* случаю, когда $\mathcal{L}(\sigma) = 0$. Если корень σ не кратный, то $\mathcal{L}'(\sigma) \neq 0$. Из уравнения (3.4) для определения $q(t)$ видно, что для реализации указанного выше алгоритма определения коэффициентов «сверху вниз» достаточно взять $q(t)$ в форме $tq_1(t)$, $\deg q_1 = \deg p$. Если же корень σ окажется кратности 2 ($\sigma = \mu$), то получаем $\ddot{q} = p$. Ясно, что достаточно

взять $q(t) = t^2 q_2(t)$, $\deg q_2 = \deg p$, чтобы однозначно определить коэффициенты полинома q_2 , начиная со старшего.

Вещественные решения. В приложениях обычно коэффициенты уравнения вещественны, и по постановке задачи требуется найти вещественные решения. Остановимся на этом подробнее. Итак, $\mathcal{L}(D)x = f$, $a_j \in \mathbb{R}$, $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$. Вначале рассмотрим однородное уравнение ($f \equiv 0$). Коэффициенты характеристического полинома $\mathcal{L} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ вещественны. Значит, корни λ_1, λ_2 либо вещественные, либо комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \bar{\mu}$. Это одна из причин, по которой мы с самого начала перешли к комплекснозначным функциям. В первом случае фундаментальные системы решений $\exp\{\lambda_1 t\}$, $\exp\{\lambda_2 t\}$ или $\exp\{\lambda_1 t\}$, $t \exp\{\lambda_1 t\}$ (если $\lambda_1 = \lambda_2$) вещественны. Общее вещественное решение суть линейные комбинации элементов базиса с вещественными произвольными постоянными c_1, c_2 .

Пусть $\lambda_1 = \mu = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\mu} = \alpha - i\beta$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общим комплексным решением будет

$$x(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{\bar{\mu} t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Как выделить в этой формуле только вещественные решения? Вещественные числа характеризуются условием $z = \bar{z}$. Отсюда

$$x(t) = \bar{x}(t) \Rightarrow c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{\bar{\mu} t} = \bar{c}_1 e^{\bar{\mu} t} + \bar{c}_2 e^{\mu t}.$$

Вследствие линейной независимости экспонент ($\mu \neq \bar{\mu}$) получаем $\bar{c}_1 = c_2$, т. е. коэффициенты при сопряженных экспонентах должны быть сопряженными. Это позволяет записать общее решение без использования комплекснозначных функций:

$$\begin{aligned} x(t) &= c e^{\mu t} + \bar{c} e^{\bar{\mu} t} = (a + ib) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + \\ &+ (a - ib) e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

Здесь $c_1 = 2a$, $c_2 = -2b$ являются произвольными из \mathbb{R} .

Функции $\exp\{\alpha t\} \sin \beta t$, $\exp\{\alpha t\} \cos \beta t$ линейно независимы. Действительно, если приравнять их линейную комбинацию к нулю ($t \in \mathbb{R}$), то, полагая $t = 0$ и $t = \pi/(2\beta)$, убеждаемся, что коэффициенты нулевые. Остановимся на этих функциях подробнее.

Из линейности уравнения и вещественности a_j следует, что вещественная и мнимая части решения являются решениями: достаточно применить операции Re , Im к обеим частям уравнения. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} e^{\mu t} &\rightarrow \{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \{\operatorname{Re} e^{\mu t}, \operatorname{Im} e^{\mu t}\}, \\ e^{\bar{\mu} t} &\rightarrow \{e^{\alpha t} \cos \beta t, -e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \{\operatorname{Re} e^{\bar{\mu} t}, \operatorname{Im} e^{\bar{\mu} t}\}. \end{aligned}$$

Среди полученных четырех решений только два линейно независимых. Они и составляют фундаментальную систему решений.

Заметим здесь общую картину. В комплексном базисе вещественного однородного дифференциального уравнения имеем функции $\varphi_1 = \varphi = u + iv$ и $\varphi_2 = \bar{\varphi} = u - iv$. Решениями являются и $u = \operatorname{Re} \varphi$, $v = \operatorname{Im} \varphi$. Покажем, что пара u, v образует фундаментальную систему вещественных решений. Осталось доказать их линейную независимость над полем \mathbb{R} :

$$c_1 u + c_2 v \equiv 0, \quad c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{c_1 - ic_2}{2} \varphi + \frac{c_1 + ic_2}{2} \bar{\varphi} \equiv 0 \Rightarrow c_j = 0$$

($c_1 - ic_2 = c_1 + ic_2 = 0$ в силу независимости решений $\varphi, \bar{\varphi}$).

Что касается неоднородного уравнения, то при вещественных a_j , $f(t)$, $\varphi_j(t)$ алгоритмы Лагранжа, Коши и неопределенных коэффициентов приведут к построению вещественного частного решения $x_*(t)$. Здесь лишь добавим полезный на практике прием, называемый методом *комплексных амплитуд*.

Пусть $a_j \in \mathbb{R}$, $f(t) = p(t) \cos(\beta t + \nu)$, $p(t)$ — полином. Заметим, что $f(t) = \operatorname{Re} g(t)$, где $g(t) = q(t) \exp\{\sigma t\}$, $\sigma = i\beta$, $q(t) = p(t) \exp\{i\nu\} \in \mathbb{C}$. Рассмотрим комплексное уравнение

$$\ddot{z} + a_1 \dot{z} + a_0 z = g(t), \quad z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

и построим его частное решение $z_*(t)$ методом неопределенных коэффициентов. Тогда для исходного уравнения находим $x_*(t) = \operatorname{Re} z_*(t)$. Название метода связано с тем, что в случае $p(t) = A \in \mathbb{R}$ новая «амплитуда» $q(t) = A \exp\{i\nu\}$ комплексная.

Уравнение n -го порядка. Изложим теперь конспективно обобщение пройденного материала для уравнения

$$\mathcal{L}(D)x = f(t), \quad \mathcal{L}(D) = D^n + \dots + a_1 D + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad f \in C(I).$$

Неоднородность в дальнейшем ограничим классом квазиполиномов, $I = \mathbb{R}$. Пока считаем $f \equiv 0$. Ищем решение в форме $\varphi(t) = \exp\{\lambda t\}$. Подставляя в уравнение $\mathcal{L}(D)x = 0$, получаем, что число λ должно быть корнем характеристического полинома $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$. Даже если все $a_j \in \mathbb{R}$, корень λ уже в общем случае комплексный.

1°. Пусть корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны. Имеем n различных решений $\varphi_j(t) = \exp\{\lambda_j t\}$. Вычислим вронскиан:

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = e^{\sum \lambda_j t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Получили известный определитель Вандермонда, который численно равен $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. Следовательно, $\{\varphi_j\}_1^n$ — фундаментальная система и общее решение определяется формулой

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

2°. В случае кратных корней обозначим различные корни через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, их кратности равны m_1, \dots, m_s . Тогда

$$\mathcal{L}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \quad m_1 + \dots + m_s = n.$$

Если $m_i > 1$, то λ_i будет корнем и производной $\mathcal{L}'(\lambda)$ в силу

$$\mathcal{L}'(\lambda) = ((\lambda - \lambda_i)^{m_i} [\dots])' = m_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i - 1} [\dots] + (\lambda - \lambda_i)^{m_i} [\dots]'$$

Продолжая дифференцирование, убеждаемся, что

$$\mathcal{L}(\lambda_i) = \mathcal{L}'(\lambda_i) = \dots = \mathcal{L}^{(m_i - 1)}(\lambda_i) = 0.$$

Непосредственной подстановкой проверяем тождество

$$\mathcal{L}(D)e^{\lambda t} = D^n e^{\lambda t} + a_{n-1} D^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_0 e^{\lambda t} \equiv \mathcal{L}(\lambda) e^{\lambda t}$$

по переменным $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Дифференцируя тождество по λ (меняя порядок производных по t и λ), получаем

$$\mathcal{L}(D)te^{\lambda t} \equiv \mathcal{L}'(\lambda)e^{\lambda t} + \mathcal{L}(\lambda)te^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Когда $m_i > 1$, получим, что при $\lambda = \lambda_i$ справа нуль, т. е. вместе с $\exp\{\lambda_i t\}$ решением будет и функция $t \exp\{\lambda_i t\}$. Рассуждая аналогичным образом, получим систему n решений

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ & \dots\dots\dots \\ & e^{\lambda_s t}, t e^{\lambda_s t}, \dots, t^{m_s-1} e^{\lambda_s t}. \end{aligned}$$

Докажем их линейную независимость. Для этого составим линейную комбинацию и приравняем её к нулю:

$$\sum_{i=1}^s p_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0, \quad \deg p_i \leq m_i - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нужно показать, что все коэффициенты полиномов $p_i(t)$ равны нулю. Предположим противное: $p_1(t) \not\equiv 0$ (так пронумеровали). Домножим тождество по t на $\exp\{-\lambda_s t\}$:

$$p_1(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_s)t} + \dots + p_{s-1}(t) e^{(\lambda_{s-1} - \lambda_s)t} + p_s(t) \equiv 0.$$

Дифференцируем по t m_s раз, чтобы «исчез» полином $p_s(t)$:

$$\tilde{p}_1(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_s)t} + \dots + \tilde{p}_{s-1}(t) e^{(\lambda_{s-1} - \lambda_s)t} \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в силу $\lambda_1 - \lambda_s \neq 0$ имеем $\deg p_1 = \deg \tilde{p}_1$. Теперь домножим на $\exp\{(\lambda_s - \lambda_{s-1})t\}$ и дифференцируем m_{s-1} раз. Продолжая этот процесс, в итоге получим $q(t) \equiv 0$, $\deg q = \deg p_1$, но тогда $p_1(t) \equiv 0$. Противоречие.

Итак, общим решением однородного уравнения является

$$x = \sum_{i=1}^s p_i(t) e^{\lambda_i t}, \quad \deg p_i \leq m_i - 1,$$

где m_i коэффициентов каждого полинома $p_i(t)$ являются произвольными постоянными (их общее количество равно n).

3°. Рассмотрим неоднородное уравнение, когда $f(t)$ квазиполином. В силу принципа суперпозиции (следствие линейности) достаточно ограничиться одним слагаемым: $f(t) = p(t) \exp\{\sigma t\}$. Если $\mathcal{L}(\sigma) \neq 0$ ($\sigma \neq \lambda_i$, нерезонансный случай), то частное решение $x_*(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов

в форме $x_*(t) = q(t) \exp\{\sigma t\}$, $\deg q = \deg p$. Если σ — корень характеристического полинома $\mathcal{L}(\lambda)$ кратности k , то следует брать $q(t) = t^k q_1(t)$, $\deg q_1 = \deg p$. Коэффициенты полиномов $q(t)$, $q_1(t)$ находятся из линейных алгебраических соотношений, которые получаются после подстановки $x_*(t)$ в уравнение и приравнивания слева и справа выражений при функциях $t_j \exp\{\sigma t\}$.

4°. Что касается вещественного случая, то по построенному выше комплексному базису решений $\varphi_{ij} = t^i \exp\{\lambda_j t\}$ однородного уравнения нетрудно построить вещественный. Если $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то оставляем φ_{ij} в базисе. Если корень λ_j комплексный, то обязательно есть сопряженное решение φ_{ik} . Вместо пары $\{\varphi_{ij}, \varphi_{ik}\}$ из комплексного базиса в вещественный включаем $\{\operatorname{Re} \varphi_{ij}, \operatorname{Im} \varphi_{ij}\}$. Общее вещественное решение — сумма частного $x_*(t)$ и линейной комбинации вещественных базисных решений однородного уравнения с вещественными коэффициентами.

Приводимые уравнения. Поскольку линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами интегрируются в элементарных функциях, то естественно возникает следующий вопрос. Можно ли данное уравнение с переменными коэффициентами $a_i = a_i(t)$ свести к случаю $a_i = \operatorname{const}$ с помощью замены независимой переменной и (или) искомой функции?

Изучим возможности замены независимой переменной $\tau = s(t)$ ($s \in C^2(I)$, $\dot{s}(t) \neq 0$) в уравнении второго порядка

$$\mathcal{L}(D)x \equiv \ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \quad a_i \in C(I). \quad (3.5)$$

Для правомерности следующих выкладок дополнительно предполагаем $a_0 \in C^1(I)$ и $a_0(t) \neq 0$. Для определенности $a_0(t) > 0$. Преобразуем производные (по τ обозначаем их штрихом):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = x' \dot{s}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (x' \dot{s}) = \frac{dx'}{dt} \dot{s} + x' \ddot{s} \\ &= \frac{dx'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \dot{s} + x' \ddot{s} = x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получим

$$x''\dot{s}^2 + (\ddot{s} + a_2\dot{s}) + a_0x = 0, \quad \tau \in s(I).$$

Здесь $x = x(\tau)$, а в выражениях $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$, $a_i(t)$ сделана замена $t = s^{-1}(\tau)$. Поделив на \dot{s}^2 , получаем при x коэффициент a_0/\dot{s}^2 , который должен быть положительной константой. Тогда

$$\frac{a_0(t)}{\dot{s}^2(t)} = \frac{1}{c^2} = \text{const} \Rightarrow \dot{s} = c\sqrt{a_0} \Rightarrow s(t) = c \int \sqrt{a_0} dt. \quad (3.6)$$

Константа c положительна, если $\dot{s} > 0$, иначе $c < 0$. Поскольку мы не следили за коэффициентом при x' , то полученное условие приводимости является лишь необходимым. Итак, если искомая замена $\tau = s(t)$ существует, то она определяется формулой (3.6).

После выполнения замены $\tau = s(t)$ в соответствии с (3.6) получаем дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{1}{c} \left\{ \frac{\dot{a}_0}{2a_0^{3/2}} + \frac{a_1}{\sqrt{a_0}} \right\} x' + \frac{1}{c^2} x = 0, \quad \tau \in s(I). \quad (3.7)$$

Здесь в выражениях $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\dot{a}_0(t)$ предполагается замена $t = s^{-1}(\tau)$. Условие $\{\dots\} = \text{const}$ (в переменной t) является дополнительным ограничением на коэффициенты $a_0(t)$, $a_1(t)$.

Для примера рассмотрим уравнение Чебышёва (1821–1894):

$$(1 - t^2)\ddot{x} - t\dot{x} + n^2x = 0. \quad (3.8)$$

В каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Построим общее решение для $I = (-1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Замена $\tau = s(t)$ по формуле (3.6) дает $\tau = \arccos t$, $t = \cos \tau$. При этом выбираем $c = -1/n$ и опускаем константу в неопределенном интеграле. После замены получаем $\{\dots\} = 0$ в (3.7):

$$x'' + n^2x = 0, \quad \tau \in (0, \pi) \Rightarrow x(\tau) = c_1 \cos n\tau + \sin n\tau.$$

Тогда общим решением уравнения Чебышёва будет

$$x(t) = c_1 \cos(n \arccos t) + c_2 \sin(n \arccos t), \quad t \in I = (-1, 1).$$

Решение $T_n = \cos(n \arccos t)$ называется *полиномом Чебышёва*.

Покажем, что функция $T_n(t)$ действительно полином. Определим $T_0(t) = 1$. Из тождества

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi,$$

полагая $\varphi = \arccos t$, в соответствии с определением $T_n(t)$ получаем рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad T_0 = 1, \quad T_1 = t.$$

Отсюда $T_2 = 2t^2 - 1$, $T_3 = 4t^3 - 3t$, $T_4 = 8t^4 - 8t^2 + 1$, $T_5 = 16t^5 - 20t^3 + 5t, \dots$ Отметим, что изначально нами принято определение $T_n = \cos(n \arccos t)$, $t \in (-1, 1)$, но и при $t \geq 1$ формула имеет смысл, только $\arccos t$ будет комплексным при $|t| > 1$ и косинус такого числа будет больше 1. В итоге получили полиномы $T_n(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), не имеющие особенности в особых точках $t \pm 1$ дифференциального уравнения (3.8).

Прикладное значение полиномов Чебышёва (это выяснится, в частности, в курсе численных методов) заключается в следующем свойстве. Полином $\bar{T}_n(t) = 2^{1-n}T_n(t)$ ($n \geq 1$) среди полиномов n -й степени со старшим коэффициентом 1 имеет на отрезке $[-1, 1]$ наименьшее значение максимума модуля (наименьшее отклонение от нуля). Иными словами, для любого полинома $P_n(t) = t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \dots$ выполняется неравенство

$$\max_{[-1,1]} |P_n(t)| \geq \max_{[-1,1]} |\bar{T}_n(t)| = 2^{1-n}.$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим материальную точку массы m , движущуюся по прямой (оси Ox). Действующие силы в линейном приближении: сила «упругости» $F_1 = -a_0x$, притягивающая точку к началу координат; сила сопротивления среды $F_2 = -a_1\dot{x}$, пропорциональная скорости; возмущающая сила $F(t)$. По второму закону Ньютона $m\ddot{x} = -a_1\dot{x} - a_0x + F(t)$, или в более удобной записи

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2x = f(t), \quad k = \frac{a_1}{2m} \geq 0, \quad \omega_0^2 = \frac{a_0}{m} > 0, \quad f = \frac{F}{m}.$$

Аналогичным уравнением описываются малые электрические колебания в контуре, состоящем из емкости, индуктивности и сопротивления (без учета внешнего воздействия $f(t)$).

1°. *Гармонический осциллятор.* При отсутствии внешней силы и пренебрежимо малом сопротивлении имеем $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Найдем общее вещественное решение в соответствии с механическим смыслом уравнения. Вычисляем корни характеристического полинома $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Напомним, что характеристическое уравнение $\mathcal{L}(\lambda) = 0$ получается в результате подстановки в уравнение $x = \exp\{\lambda t\}$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, общим комплексным решением будет функция

$$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Вещественные решения характеризуются условием $x(t) = \bar{x}(t)$, откуда $c_1 = \bar{c}_2$ ($c_1 = a + ib$, $c_2 = a - ib$) и получаем выражение

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + ib)(\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + (a - ib)(\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) = \\ &= 2a \cos \omega_0 t - 2b \sin \omega_0 t = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad c_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Произвольные вещественные константы $2a, -2b$ традиционно обозначили как c_i (но уже $c_i \in \mathbb{R}$).

В обозначениях $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\sin \psi = c_1/A$, $\cos \psi = c_2/A$ получаем $x = A \sin(\omega_0 t + \psi)$, т.е. периодическое колебание с амплитудой A , начальной фазой ψ , частотой ω_0 и периодом $2\pi/\omega_0$. Значения A, ψ однозначно определяются заданием начальных положения и скорости в произвольный момент времени: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$. Независимость частоты от амплитуды (*изохронность*) — существенное отличие от более точных (более адекватных) нелинейных моделей колебаний.

2°. *Ангармонические колебания.* Учтем силу сопротивления:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2.$$

Если $k > \omega_0$ (относительно сильное сопротивление среды), то корни $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$ различны и отрицательны. Движение $x(t) = c_1 \exp\{\lambda_1 t\} + c_2 \exp\{\lambda_2 t\}$ аperiодически затухает.

Если $k < \omega_0$, то $\lambda_{1,2} = -k \pm i\omega_1$, $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-kt} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) = \\ &= e^{-kt} A \sin(\omega_1 t + \psi), \quad A, \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Происходят колебания с убывающей амплитудой. Случай $k = \omega_0$ предлагается в качестве упражнения.

3°. *Влияние внешней периодической силы.* Вначале рассмотрим уравнение без учета сопротивления среды:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = G \cos \omega t, \quad G, \omega = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся методом комплексных амплитуд. Перейдем с учетом $G \cos \omega t = \text{Re } G \exp\{i\omega t\}$ к комплексному дифференциальному уравнению $\ddot{z} + \omega_0^2 z = G \exp\{i\omega t\}$. Далее все зависит от соотношения внешней частоты ω с собственной ω_0 . Правая часть — квазиполином. В нерезонансном случае, когда $\sigma = i\omega \neq \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ($\omega \neq \omega_0$), ищем частное решение $z_*(t)$ в форме $H \exp\{i\omega t\}$, $H = \text{const}$. После подстановки в уравнение и сокращения экспоненты находим частное и общее решения исходного уравнения:

$$\begin{aligned} -H\omega^2 + H\omega_0^2 &= G \Rightarrow H = \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ x_*(t) &= \text{Re } z_*(t) = \text{Re } H e^{i\omega t} = H \cos \omega t, \\ x(t) &= \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A \sin(\omega_0 t + \psi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

В результате наложения гармонических колебаний с близкими частотами могут наблюдаться *биения* — сигнал поочередно усиливается и ослабляется (радиолюбители, если они еще существуют, хорошо знакомы с этим эффектом).

Перейдем к резонансному случаю, когда $\omega = \omega_0$. При этом $\sigma = i\omega = \lambda_1 = i\omega_0 \neq \lambda_2 = -i\omega_0$, т.е. σ — корень кратности 1.

Поэтому ищем $z_*(t)$ в форме $tH \exp\{i\omega_0 t\}$:

$$2i\omega_0 H + \omega_0^2 t - H\omega_0^2 t = G \Rightarrow H = -\frac{iG}{2\omega_0},$$

$$z_*(t) = -\frac{iGt}{2\omega_0} e^{i\omega_0 t}, \quad x_*(t) = \operatorname{Re} z_*(t) = \frac{G}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t,$$

$$x(t) = \frac{Gt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + A \sin(\omega_0 t + \psi). \quad (4.2)$$

Формально размах колебаний неограниченно возрастает с ростом времени t . С этим обстоятельством и связан термин резонанс. Следует иметь в виду, что линейные модели получаются в результате линеаризации (линейного приближения). Они адекватны в малом и выводы не следует обобщать «на бесконечность». Реально наблюдается лишь усиление колебаний. Эффект известен с детства — достаточно вспомнить качели.

4°. *Влияние периодической силы и сопротивления среды.* Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = G \cos \omega t, \quad G = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Пусть сопротивление невелико ($k < \omega_0$). Решения однородного уравнения экспоненциально затухают с показателем $-k$. Случай нерезонансный, поскольку $\sigma = i\omega \neq \lambda_{1,2}$. Методом неопределенных коэффициентов получим частное решение вида $x_*(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Следовательно, с течением времени $x(t) \approx x_*(t)$. Взаимодействие между трением (слагаемое $2k\dot{x}$) и внешней периодической силой приводит к установлению колебаний, близких к периодическим с частотой внешней силы ω .

5°. В заключение элементарного («линеаризованного») экскурса в теорию колебаний рассмотрим один из вопросов о корректности модели: выполняется ли при $\omega \rightarrow \omega_0$ предельный переход (4.1) \rightarrow (4.2)? Фиксируем произвольные начальные данные $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Тогда из представления (4.1) получаем

общее решение в форме Коши:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow x_0 = \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2} + A \sin \psi, v_0 = \omega_0 A \cos \psi,$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A [\sin \omega_0 t \cos \psi + \cos \omega_0 t \sin \psi] = \\ &= \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования формулы (4.2):

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin \psi, v_0 = \omega_0 A \cos \psi \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{Gt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Сравнивая два общих решения, уточняем поставленный вопрос:

$$G \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow \frac{Gt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\omega \rightarrow \omega_0)?$$

Убеждаемся в справедливости этого предельного перехода по частоте ω при фиксированном t , раскрывая неопределенность слева (типа $0/0$ при $\omega \rightarrow \omega_0$) по правилу Лопиталья:

$$(\cos \omega t)'_{\omega}|_{\omega=\omega_0} = -t \sin \omega_0 t, \quad (\omega_0^2 - \omega^2)'_{\omega}|_{\omega=\omega_0} = -2\omega_0.$$

Предельный переход не является равномерным по $t \geq 0$, так как модельное резонансное решение при $\omega = \omega_0$ неограничено.

5. δ -ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Модели оперируют идеализированными объектами. Физики используют понятия плотности массы, заряда и в то же время говорят о точечной массе, точечном заряде. Как математически формализовать возникшее казалось бы противоречие? Ведь если единичная масса на вещественной прямой сосредоточена в начале координат, то для плотности $\rho(x)$ следует написать

$$1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx, \quad \varepsilon > 0.$$

В то же время выполняется $\rho(x) = 0$ при $x \neq 0$. Это не согласуется с равенством единице определенного интеграла. Выход состоит в расширении понятия функции. Систематическое применение обобщенных функций в теоретической физике связано с именем Поля Дирака (1902–1984) (δ -функция Дирака). Ранее «импульсная» функция рассматривалась в работах Коши (1789–1857), Пуассона (1781–1840), Кирхгофа (1824–1887), активно использовалась Хевисайдом (1850–1925). Современная математическая теория обобщенных функций сформировалась позже в работах Соболева (1908–1989) и Шварца (1915–2002).

Приведем некоторые наводящие соображения. Точка — математическая идеализация геометрического объекта, не имеющая размеров. До сих пор мы рассматривали функции, заданные поточно: $f(x)$, $x \in X$, но какой «точный» смысл высказывания о значении, например, температуры в заданной точке тела? Любой измерительный прибор (в данном случае «градусник») даст лишь усредненный интегральный показатель в окрестности «точки приложения». На самом деле мы обычно имеем дело с функционалами. Ничего страшного, если указанная выше «неправильная» функция $\rho(x)$ фигурирует в промежуточных выкладках, лишь бы в итоге она оказалась под интегралом.

Обобщенные функции. Сначала приведем формальные определения. Введем пространство *основных* (*пробных*) функций K . По определению $\varphi \in K$, если $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ и функция φ финитна. Последнее означает, что существует отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, вне которого $\varphi(t) \equiv 0$. У каждой φ свой $[a, b]$. Определим сходимость в пространстве K : $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset K$, $\varphi_j \rightarrow \varphi \in K$ при $j \rightarrow +\infty$, если

$$1) \exists [a, b]: \varphi_j(t) = \varphi(t) = 0 \forall t \notin [a, b], \forall j;$$

$$2) \varphi_j \rightrightarrows \varphi, \varphi_j^{(n)} \rightrightarrows \varphi^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}, j \rightarrow +\infty.$$

Пункт 1) означает, что есть общий отрезок, вне которого все члены последовательности и предельная функция равны нулю. В пункте 2) речь о равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_j(t)$ и производных $\varphi_j^{(n)}(t)$. Сходимость позволяет сформулировать понятие непрерывности. Функционал

$J: K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен в точке $\varphi \in K$, если

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \Rightarrow J(\varphi_j) \rightarrow J(\varphi), \quad j \rightarrow +\infty.$$

Первая стрелочка \rightarrow означает сходимость в пространстве K , а вторая — сходимость числовой последовательности в \mathbb{R} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенной функцией называется линейный непрерывный функционал J на пространстве K .*

Линейность означает, что

$$J(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1J(\varphi_1) + \lambda_2J(\varphi_2), \quad \forall \varphi_i \in K, \forall \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Начнем наполнять содержанием это пока слишком абстрактное понятие. Рассмотрим обычную функцию $f(t)$ на \mathbb{R} . Для определенности считаем её непрерывной (достаточно локальной интегрируемости). Тогда формула

$$J(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt, \quad \varphi \in K, \quad (5.1)$$

определяет обобщенную функцию. Интеграл пишется несобственным, но фактически интегрирование проводится на некотором отрезке $[a, b]$ ($\forall \varphi$). Итак, относительно обычной функции f известно, как она «действует» на каждую пробную φ .

Обратно, по этой информации восстанавливается сама f :

$$f, g \in C(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi dt = \int_{-\infty}^{\infty} g\varphi dt \quad \forall \varphi \in K \Rightarrow f(t) \equiv g(t).$$

Предположим противное: $f(t_0) \neq g(t_0)$, для определенности $f(t_0) - g(t_0) > 0$, $t_0 = 0$. Возьмем пробную функцию

$$\varphi(t) = \exp\{(t^2 - \varepsilon^2)^{-1}\}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varphi \equiv 0, \quad |t| \geq \varepsilon.$$

Это колоколообразный всплеск в ε -окрестности t_0 . При таком выборе φ и $\varepsilon \ll 1$ имеем $\langle f, \varphi \rangle - \langle g, \varphi \rangle = \langle f - g, \varphi \rangle > 0$. Противоречие означает $f(t) \equiv g(t)$. Если брать кусочно непрерывные

функции $f(t)$, то они восстанавливаются с точностью до значений в точках разрыва. По умолчанию условимся переопределять эти значения по непрерывности справа, сохраняя тем самым единственность восстановления поточечно. Ситуация аналогична восстановлению вектора по набору проекций на базисные элементы. Однозначность позволяет отождествить вектор с набором координат. В общих терминах каждый объект однозначно определяется набором взаимодействий с другими объектами («скажи мне, кто твои друзья, и я скажу, кто ты»).

Итак, в указанном смысле можно отождествить кусочно непрерывные функции $f(t)$ с функционалами $J(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ (с набором «проекций» на элементы K). Не для всякой обобщенной функции J найдется функция f из условия $J(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$, но формально принято сохранять интегральное обозначение (5.1).

По определению δ -функцией называется обобщенная функция, действующая по правилу $J(\varphi) = \varphi(0) \forall \varphi \in K$. Пробной функции ставится в соответствие её значение в нуле. При этом сохраняется интегральное обозначение (5.1):

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt.$$

Обобщенную функцию $\delta(\varphi)$ обозначают «обычной» $\delta(t)$.

Теперь уточним, в каком смысле плотность $\rho(x)$ точечной единичной массы можно считать равной $\delta(x)$. Рассмотрим кусочно непрерывную функцию $\delta_\varepsilon(x)$:

$$\delta_\varepsilon(x) = (2\varepsilon)^{-1}, \quad |x| \leq \varepsilon, \quad \delta_\varepsilon(x) = 0, \quad |x| > \varepsilon > 0.$$

Эту ступеньку высотой 2ε на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ считаем при малых значениях ε аппроксимацией $\rho(x)$. Вместо точки единичная масса «рассредоточена» на малом отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Интуитивно $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x) = \rho(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Осталось уточнить математически, как следует понимать этот предельный переход.

Покажем, что $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta$ в обобщенном смысле: $\delta_\varepsilon(\varphi) \rightarrow \delta(\varphi)$ (в \mathbb{R}) $\forall \varphi \in K$. В традиционных интегральных обозначениях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in K, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Вычислим интеграл слева с обычной функцией $\delta_\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x) dx &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon} - \int_0^{-\varepsilon} \right), \\ F(\varepsilon) &:= \int_0^{\varepsilon} \varphi dx = F(0) + F'(0)\varepsilon + o(\varepsilon) = 0 + \varphi(0)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon \varphi dx &= \frac{1}{2\varepsilon} [\varphi(0)\varepsilon - \varphi(0)(-\varepsilon) + o(\varepsilon)] = \varphi(0) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда $\langle \delta_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in K$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Укажем аналогию. Сходимость матриц $A_j \rightarrow A$ можно определить с помощью матричной нормы: $\|A_j - A\| \rightarrow 0$. Слабая сходимость определяется как $|A_j x - Ax| \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Для матриц эти понятия эквивалентны. Для обобщенных функций сходимость $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ понимается именно в слабом смысле: $\langle \delta_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in K$.

Определим понятие производной от обобщенной функции. Для $f \in C^1(\mathbb{R})$ интегрированием по частям получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t)\varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt \quad \forall \varphi \in K. \quad (5.2)$$

Внеинтегральная разность $\varphi f|_{-\infty}^{+\infty}$ равна нулю вследствие финитности φ . Возьмем это соотношение за основу определения. Обобщенная функция g , заданная на K равенством $\langle g, \varphi \rangle = -\langle f, \dot{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi$, называется производной обобщенной функции f . Подразумевается (по определению) $g(\varphi) = -f(\dot{\varphi})$, но принята традиционная интегральная запись (5.2), как будто f и g — обычные функции. Обозначение $g = \dot{f}$ сохраняется, даже если в обычном смысле функций $f(t)$ и $g(t) = \dot{f}(t)$ не существует. Аналогично определяются высшие производные, например,

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \ddot{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in K \Rightarrow g := \ddot{f}: K \rightarrow \mathbb{R}.$$

Значение $\langle \ddot{f}, \varphi \rangle \forall \varphi$ определяется числом $\langle f, \ddot{\varphi} \rangle$. Линейность таким образом заданного функционала \ddot{f} очевидна, непрерывность следует из определения сходимости в пространстве K :

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \Rightarrow \langle \ddot{f}, \varphi_j \rangle = \langle f, \ddot{\varphi}_j \rangle \rightarrow \langle f, \ddot{\varphi} \rangle = \langle \ddot{f}, \varphi \rangle.$$

Аналогичным образом определяется производная любого порядка от произвольной обобщенной функции. И эта производная является обобщенной функцией. В рамках механической терминологии независимую переменную обозначаем t и называем временем. Производные (невысокого порядка) обозначаются точками сверху. Далее для акцента обобщенные производные пишем со штрихами: f', f'' . В силу формулы (5.2), если существует обычная непрерывная производная $\dot{f}(t)$, то $\dot{f} = f'$ в смысле принятого отождествления непрерывной функции $h(t)$ с функционалом $\langle h, \varphi \rangle$ (набором «проекций» на элементы $\varphi \in K$).

В качестве примера вычисления обобщенных производных рассмотрим ступенчатую функцию Хевисайда $\theta(t)$: $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$, $t \geq 0$. Вычислим правую часть (5.2) для $f = \theta$:

$$\begin{aligned} \langle \theta, \dot{\varphi} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(t) dt = \\ &= \varphi|_0^{\infty} = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in K. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению $\theta'(t) = \delta(t)$ ($\langle \delta, \varphi \rangle = -\langle \theta, \dot{\varphi} \rangle$). В обычном смысле функция $\theta(t)$ недифференцируема в нуле.

Применение в теории ОДУ. После начального знакомства с обобщенными функциями вернемся к дифференциальным уравнениям. Ограничимся примером механического содержания:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = V\delta(t - t_*), \quad a_i \in C(\mathbb{R}), \quad V > 0. \quad (5.3)$$

Правая часть интерпретируется как сосредоточенная в момент времени t_* сила с конечным импульсом (мгновенный удар):

$$\int_{-\infty}^{\infty} V\delta(t - t_*) dt = V \int_{t_* - \varepsilon}^{t_* + \varepsilon} \delta(t - t_*) dt = V, \quad \varepsilon > 0.$$

Вне точки $t = t_*$ на интервалах $(-\infty, t_*)$, $(t_*, +\infty)$ уравнение является обычным линейным однородным второго порядка. В целом (на \mathbb{R}) в уравнении (5.3) имеется в виду равенство обобщенных функций: $\langle \text{левая часть}, \varphi \rangle = V\varphi(t_*) \forall \varphi \in K$.

Подробный анализ показывает [29], что движение непрерывно, а в момент времени $t = t_*$ происходит скачок производной $\dot{x}(t_* + 0) - \dot{x}(t_* - 0) = V$ (излом траектории из-за толчка).

Этот же результат можно получить, оставаясь в рамках обычных функций. Рассмотрим уравнение с параметром $\varepsilon > 0$:

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = V\delta_\varepsilon(t - t_*), \quad a_i \in C(\mathbb{R}), \quad V > 0. \quad (5.4)$$

Определено семейство решений $x_\varepsilon(t)$. При этом в классическом смысле уравнение рассматривается на интервалах времени $(-\infty, t_* - \varepsilon)$, $(t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$, $(t_* + \varepsilon, +\infty)$ и их замыканиях. В точках $t = \pm\varepsilon$ разрыва правой части решения склеиваются по непрерывности $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, поскольку, если стандартно перейти к системе уравнений первого порядка, фазовый вектор $(x(t), \dot{x}(t))$ (решение интегрального уравнения) будет непрерывным в силу кусочной непрерывности правой части системы.

Предельная функция $x = \lim x_\varepsilon (\varepsilon \rightarrow +0)$ будет отражать реакцию системы на удар. Аппарат обобщенных функций позволяет избегать каждый раз подобного предельного перехода. Подробно теория обобщенных функций изложена в специальной литературе (см.: Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959).

Приведем указанные технические выкладки для «гармонического осциллятора» под воздействием единичного импульса:

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta(t), \quad x(t) = 0, \quad t < 0. \quad (5.5)$$

По традиции записываем дифференциальное уравнение в обычных функциях, хотя для искомой обобщенной функции x указание аргумента t (как и для δ -функции) носит условный характер. Имеется в виду $\langle \text{левая часть}, \varphi \rangle = \langle \text{правая часть}, \varphi \rangle \forall \varphi$. Принимая во внимание определение второй производной равенством $\langle x'', \varphi \rangle = \langle x, \ddot{\varphi} \rangle$ (т. е. $x''(\varphi) = x(\ddot{\varphi}) \forall \varphi \in K$), приходим к

следующей формализованной постановке задачи: требуется найти обобщенную функцию $x: K \rightarrow \mathbb{R}$ из условий

$$\langle x, \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in K, \quad (5.6)$$

$$\langle x, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi: [a, b] \subset \{t < 0\}. \quad (5.7)$$

Соотношение (5.6) является «точной» записью дифференциального уравнения в (5.5), а (5.7) представляет условие покоя $x(t) = 0$ ($t < 0$) до момента импульсного воздействия. Отрезок $[a, b]$ соответствует определению пространства K : $\varphi(t) \equiv 0$ вне $[a, b] = [a, b]_\varphi$. Запись $\langle x, \cdot \rangle$ означает $x(\cdot)$, но формально используются интегральные обозначения.

Перейдем к обычному уравнению с параметром $\varepsilon > 0$:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta_\varepsilon(t), \quad x(t) = 0, \quad t < -\varepsilon.$$

На промежутках $(-\infty, -\varepsilon]$, $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $[\varepsilon, +\infty)$ определены решения

$$x(t) = 0, \quad x(t) = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0^2} + A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad x(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Параметры $A, \alpha, B, \beta = \text{const}$ выбираются из условия склейки решений по x и \dot{x} при $t = \pm\varepsilon$. Начнем с $t = -\varepsilon$:

$$0 = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0^2} + A \sin(-\omega_0\varepsilon + \alpha), \quad 0 = A\omega_0 \cos(-\omega_0\varepsilon + \alpha)$$

$$\Rightarrow -\omega_0\varepsilon + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad A = -\frac{1}{2\varepsilon\omega_0^2} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0^2} [1 - \sin(\omega_0 t + \omega_0\varepsilon + \pi/2)], \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Вариант $\pi/2 \rightarrow -\pi/2$ приведет к $A \rightarrow -A$ и к тому же окончательному результату. Продолжаем склейку решений ($t = \varepsilon$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon\omega_0^2} [1 - \sin(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)] &= B \sin(\omega_0\varepsilon + \beta), \\ -\frac{\omega_0}{2\varepsilon\omega_0^2} \cos(2\omega_0\varepsilon + \pi/2) &= \omega_0 B \cos(\omega_0\varepsilon + \beta). \end{aligned}$$

Отсюда для амплитуды B и начальной фазы β получаем

$$\operatorname{tg}(\omega_0\varepsilon + \beta) = \frac{1 - \sin(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}{\cos(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}, \quad B = \frac{-\cos(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}{2\varepsilon\omega_0^2 \cos(\omega_0\varepsilon + \beta)}.$$

Вычислим при $\varepsilon \rightarrow +0$ пределы $\beta = \lim \beta(\varepsilon)$ и $B = \lim B(\varepsilon)$, применяя правило Лопиталья раскрытия неопределенности:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \left. \frac{2\omega_0 \cos(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}{2\omega_0 \sin(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \beta = 0,$$

$$B = - \left. \frac{\cos(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}{2\varepsilon\omega_0^2 \cos 0} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{2\omega_0 \sin(2\omega_0\varepsilon + \pi/2)}{2\omega_0^2} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\omega_0}.$$

Итак, после предельного перехода $\varepsilon \rightarrow +0$ находим

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (t \geq 0) \Rightarrow x(t) = \frac{\theta(t)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (5.8)$$

Движение на \mathbb{R} непрерывно (класса $C^\omega \subset C^\infty$ при $t < 0$ и $t > 0$), но в момент времени $t = 0$ происходит скачок производной: $\dot{x}(+0) - \dot{x}(-0) = 1$. Проверим непосредственной подстановкой, что непрерывная функция $x(t)$, заданная формулой (5.8), определяет функционал $\langle x, \varphi \rangle$, который является решением задачи (5.5) в классе обобщенных функций. Для этого следует проверить соотношение (5.6):

$$\langle x, \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi \rangle = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \sin \omega_0 t [\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \varphi(t)] dt = \varphi(0).$$

Здесь интеграл с $\ddot{\varphi}$ вычисляем по частям с учетом финитности функций φ (при этом интеграл $\langle \sin \omega_0 t, \varphi \rangle$ сократится).

Конечно, еще остается теоретический вопрос: а нет ли у задачи (5.5) другого решения в классе обобщенных функций? Для разности возможных решений получаем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами ($z'' + \omega_0^2 z = 0$). Такие уравнения не имеют иных решений в обобщенных функциях, кроме классических (см. упомянутую книгу Гельфанда и Шилова, с. 60). Классическое тривиальное решение очевидно ($z \equiv 0$), так что других обобщенных решений задачи (5.5) нет.

6. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Операционное исчисление первоначально возникло в электротехнике (О. Хевисайд). Математическое обоснование появилось позже. Интенсивное развитие операционного исчисления (символических методов) нашло широкое применение в прикладной математике, физике и инженерных дисциплинах.

Основные определения. В приложениях редко встречаются функции, растущие по модулю быстрее экспоненты, поэтому ограничимся классом *оригиналов*, состоящим из функций $f(t)$ с перечисленными ниже свойствами.

- 1) На полуоси $t \geq 0$ имеется лишь конечное число точек разрыва первого рода. В этих точках определяем значения f по непрерывности справа: $f(t) = f(t + 0)$. Поскольку нас интересует «будущее время», то полагаем $f(t) = 0, t < 0$.
- 2) Модуль растёт не быстрее экспоненты:

$$\forall f \exists a, M \in \mathbb{R}: |f(t)| \leq M e^{at}.$$

Линейная комбинация оригиналов является оригиналом, так что множество $\{f\}$ — линейное пространство. При таких естественных для теории линейных дифференциальных уравнений ограничениях корректно определено *преобразование Лапласа*:

$$L(f)(p) := F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (6.1)$$

Функция комплексного переменного $F(p)$ называется *изображением*. Преобразование оригинала в изображение записываем как $f(t) \rightarrow F(p)$ (встречаются и другие обозначения).

Абсолютная сходимость несобственного интеграла в определении (6.1) следует из оценки

$$|e^{-pt} f(t)| = |e^{-i \operatorname{Im} p t}| \cdot |e^{-\operatorname{Re} p t} f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re} p - a)t}.$$

Далее ограничиваемся значениями p , для которых $\operatorname{Re} p > a$. Полуплоскость $\operatorname{Re} p > a$ в \mathbb{C} определяется конкретным оригиналом.

Если в рассмотрении участвует несколько оригиналов, то считают $\operatorname{Re} p$ достаточно большим, уточняя лишь по мере необходимости. В теории функций комплексного переменного доказывается, что $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$ является однозначной аналитической функцией. Как следствие, $F(p)$ можно дифференцировать любое количество раз.

Из определения (6.1) следует, что преобразование Лапласа является линейным оператором: $f_i \rightarrow F_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a_i \Rightarrow$

$$L(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 L(f_1) + \lambda_2 L(f_2) = \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p).$$

Оператор L обратим: по изображению оригинал восстанавливается однозначно. Здесь не будем на этом останавливаться. На практике для типовых расчетов пользуются таблицами оригиналов и изображений. Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома вполне достаточно преобразования

$$t^n e^{-\lambda t} \rightarrow \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} t^n dt = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

В частности, из полученной формулы, используя выражения

$$e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t, \quad e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t, \quad \text{находим}$$

$$\cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (6.2)$$

$$t \cos \omega t \rightarrow \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \sin \omega t \rightarrow \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Отметим, что можно преобразовывать и обобщенные функции. Только, например, для определенной в предыдущем параграфе δ -функции интегрировать нужно в пределах от $t = -0$ до $+\infty$ из-за «искусственного усечения» $f(t) = 0$, $t < 0$:

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-0}^{+\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1.$$

Изображение производных. В контексте курса ОДУ необходима формула для преобразования производной:

$$\dot{f}(t) \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \dot{f}(t) dt = e^{-pt} f|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

Здесь при интегрировании по частям учтено, что $\operatorname{Re} p$ достаточно велико, чтобы $\exp\{-pt\}f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. В силу предварительного соглашения $f(0) = f(+0)$. По индукции

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Подразумевается, что производные $f^{(k)}(t)$ принадлежат пространству оригиналов, $f^{(k)}(t) = f^{(k)}(t+0)$. Для примера приведем подробные выкладки для второй производной:

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \ddot{f}(t) dt &= e^{-pt} \dot{f}|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} \dot{f}(t) dt = \\ &= -\dot{f}(0) + p(pF(p) - f(0)) = p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0). \end{aligned}$$

Особенно проста формула при нулевых начальных данных:

$$f(0) = \dot{f}(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) \Rightarrow f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p).$$

В этом притягательность операционного метода: операция дифференцирования заменяется алгебраической операцией умножения на p . В качестве упражнения предлагается доказать

$$f(t) \rightarrow F(p) \Rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p} F(p).$$

Решение задачи Коши. Рассмотрим начальную задачу

$$\mathcal{L}(D)x = f(t), \quad \mathcal{L}(D) = D^n + a_{n-1}D^{(n-1)} + \dots + a_0, \quad (6.3)$$

$$x(0) = x_1^0, \quad \dot{x}(0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_n^0, \quad a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Правую часть $f(t)$ считаем квазимногочленом (в общем случае комплекснозначным), начальный момент времени $t_0 \neq 0$ заменой начала отсчета преобразуется в $t_0 = 0$. Поскольку нас интересует будущее ($t \geq 0$, иначе заменим $t \mapsto -t$), то все рассматриваемые функции будем доопределять нулем при $t < 0$.

Применяя преобразование Лапласа, линейное дифференциальное уравнение (6.3) преобразуем в алгебраическое:

$$f(t) \rightarrow F(p), \quad x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x^{(k)}(t) \rightarrow p^k X(p) - p^{k-1}x_1^0 - \dots - px_{k-1}^0 - x_k^0 \Rightarrow$$

$$[p^n X(p) - p^{n-1}x_1^0 - \dots - x_n^0] + a_{n-1}[p^{n-1}X(p) - \dots - x_{n-1}^0] + \dots \\ + a_1[pX(p) - x_1^0] + a_0X(p) = F(p), \quad \mathcal{L}(p)X(p) + X_0(p) = F(p).$$

Заметим, что множитель при $X(p)$ — характеристический полином

$$\mathcal{L}(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0.$$

Если функция f квазиполином, то и решение вместе с производными тоже квазиполиномы, так что все участвующие в преобразованиях функции времени являются оригиналами.

Перейдем к решению уравнения в пространстве изображений (если две арифметические операции назвать решением):

$$X(p) = \frac{F(p) - X_0(p)}{\mathcal{L}(p)}, \quad \operatorname{Re} p > \tilde{a}. \quad (6.4)$$

Здесь $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ берем настолько большим, чтобы в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \tilde{a}$ не было корней характеристического полинома, оказавшегося в знаменателе. Степень полинома $X_0(p)$ не выше $n - 1$. Отметим, что $X_0(p)$ определяется начальными данными $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, которые явно фигурируют в ответе $X(p)$. Это удобнее, чем в переменной t находить сначала общее решение с произвольными постоянными, а затем их уточнять по начальным данным. Далее дробь в выражении (6.4) преобразуется в сумму так, чтобы слагаемые оказались в таблицах изображений. Оригинал $x(t)$ восстанавливается однозначно.

Пример. Приведем решение операционным методом задачи о влиянии на гармонический осциллятор периодической силы:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = G \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Нас интересует полуось времени $t \geq 0$. Переходя к изображениям, получаем решение

$$X(p) = \frac{Gp}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)}.$$

Если $\omega \neq \omega_0$ (нерезонансный случай), то

$$X(p) = \frac{G}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[\frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right],$$

и по формуле (6.2) находим оригинал

$$x(t) = G[\omega_0^2 - \omega^2]^{-1} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

В резонансном случае ($\omega = \omega_0$) получаем

$$X(p) = \frac{Gp}{(p^2 + \omega_0^2)^2} \Rightarrow x(t) = \frac{Gt}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Комментарий. Формула (6.4) упрощается в частном случае нулевых начальных данных: $x^0 = 0 \Rightarrow X_0(p) = 0$,

$$X(p) = Z(p)F(p), \quad Z(p) := [\mathcal{L}(p)]^{-1}.$$

Функцию $Z(p)$ называют *передаточной функцией*. Приведем интерпретацию в физических терминах. До начала отсчета времени $t_0 = 0$ система покоилась, $x(t) \equiv 0$. Начиная с $t_0 = 0$ ($x^0 = 0$) действует возмущающая сила $f(t)$. Откликом системы является $x(t)$ ($t \geq 0$): f — вход, x — выход. В изображениях выход получается умножением входа на передаточную функцию $Z(p)$ (отсюда и название). В приложениях часто интересуются откликом на гармоническое воздействие $f(t) = \exp\{i\omega t\}$ ($t \geq 0$).

Смысл прообраза $z(t)$ передаточной функции $Z(p)$ (как элемента пространства изображений) интерпретируется в терминах обобщенных функций: $Z(p) = X(p)$ при $x^0 = 0$ и $F(p) = 1$. Следовательно, $z(t)$ представляет собой отклик системы, покоящейся до начального момента времени, на внешнее воздействие $\delta(t)$ — единичный импульс в момент $t_0 = 0$.

7. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

До сих пор рассматривались решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Краевые задачи характеризуются тем, что информация об искомом решении задается в различные моменты времени. Решить краевую задачу в общем случае труднее, чем задачу Коши. Систематически исследование краевых задач проводится в курсе математической физики. Здесь лишь кратко (следуя [10]) остановимся на методе прогонки, который является одним из наиболее эффективных с учетом влияния погрешностей вычислений.

Общая схема. Рассмотрим на отрезке $t \in [0, T]$ краевую задачу

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad \varphi(x_0, v_0) = 0, \quad \psi(x_T, v_T) = 0, \quad (7.1)$$

где $x_0 = x(0)$, $v_0 = \dot{x}(0)$, $x_T = x(T)$, $v_T = \dot{x}(T)$. Подчеркнем, что сами значения x_0, v_0, x_T, v_T неизвестны. Пусть решение $x = y(t)$ задачи существует и единственно. В этом вопросе помогает механическое, физическое... содержание задачи. Здесь на общей теории краевых задач не останавливаемся. Поставим практическую цель: указать процедуру вычисления $y(t)$, $t \in [0, T]$.

Напомним, что интегралом уравнения называется функция (в данном случае трех переменных t, x, v), которая сохраняет постоянное значение вдоль решений (после подстановки $x = x(t)$, $v = \dot{x}(t)$). Для содержательности исследований интересуются интегралами, которые не вырождаются в константы, даже локально. Предполагается гладкость, чтобы в выкладках можно было дифференцировать необходимое количество раз.

Определяющим для интегралов $u = u(t, x, v)$ является линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial u}{\partial v} f(t, x, v) = 0. \quad (7.2)$$

Интегралы уже рассматривались в главе I, мы еще к ним вернемся в главе V. Здесь прокомментируем уравнение (7.2) конспективно. Уравнение второго порядка в задаче (7.1) эквивалентно

системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = f(t, x, v), \quad t \in I \supset [0, T], \quad (x, v) \in U,$$

где $I \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — рассматриваемые (допустимые) интервал времени и область изменения фазового вектора (x, \dot{x}) . Без необходимости не различаем векторы-строки и векторы-столбцы. Считаем $f \in C^1(I \times U)$, чтобы оказаться в условиях теоремы Пикара. Пусть u — гладкий интеграл в области $I \times U$. Для произвольной точки $(t, x, v) \in I \times U$ возьмем решение $x(\tau)$ с начальными данными $x(t) = x, \dot{x}(t) = v$ ($\tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$). Дифференцируя в момент времени $\tau = t$ тождество $u(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \equiv \text{const}$, получаем (7.2). Обратно, если в решение $u \in C^1$ уравнения (7.2) подставить интегральную кривую, то получим, что полная производная по t от $u(t, x(t), \dot{x}(t))$ равна нулю, откуда $u = \text{const}$. В зависимости от задачи интеграл $u = u(t, x, v)$ можно искать не во всей области $I \times U$, а лишь в некоторой подобласти.

Пусть $g(t, x, v), h(t, x, v)$ — такие интегралы, что

$$g(0, x, v) = \varphi(x, v), \quad h(T, x, v) = \psi(x, v), \quad (x, v) \in U.$$

В силу граничных условий в (7.1) на интересующем нас решении выполняется $\varphi(y(0), \dot{y}(0)) = 0, \psi(y(T), \dot{y}(T)) = 0$, откуда

$$g(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0, \quad h(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (7.3)$$

Появляется возможность свести краевую задачу к начальной, определяя значения x_0, v_0 (или x_T, v_T) из соотношений

$$\varphi(x_0, v_0) = 0, \quad h(0, x_0, v_0) = 0 \quad (\psi(x_T, v_T) = 0, \quad g(T, x_T, v_T) = 0).$$

Образно говоря, интегралы $g(t, x, v), h(t, x, v)$ позволяют переносить заданные граничные условия в требуемые моменты времени. Целесообразнее непосредственно искать решение $x = y(t)$ из уравнений (7.3) исключением переменной $\dot{y}(t), t \in [0, T]$.

Требования можно ослабить. Интегралы достаточно определить в подобласти, заведомо содержащей интегральную кривую $\{(t, y(t), \dot{y}(t))\}$ искомого решения. Более существенным является использование, наряду с уравнением (7.2) для интеграла

$u = g$ ($g(0, \cdot) = \varphi$), дифференциального уравнения $g(t, x, \dot{x}) = 0$ (дополнительной связи $g(t, x, v) = 0$). Параметрическое семейство решений этого уравнения (в общем случае не разрешенного относительно производной) удовлетворяет граничному условию при $t = 0$ в силу $g(0, \cdot) = \varphi$. Остается из этого семейства выделить такое решение, что $\psi(x(T), \dot{x}(T)) = 0$. Аналогично используется интеграл h , только «в обратном времени»: $h(t, x, \dot{x}) = 0$, $\varphi(x(0), \dot{x}(0)) = 0$. Если указанные семейства решений достаточно «представительны», то среди них найдется искомое $x = y(t)$. Его можно получить из системы (7.3) исключением $\dot{y}(t)$.

Общие рассуждения детализируем в частном случае.

Линейная задача. Остановимся на линейном случае:

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = q(t), \quad a_i, q \in C[0, T], \quad (7.4)$$

$$\dot{x}(0) = \alpha_0 x(0) + \beta_0, \quad \dot{x}(T) = \alpha_1 x(T) + \beta_1, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Ограничиваясь отрезком времени $[0, T]$, производные в граничных точках понимаем как односторонние. В общих обозначениях

$$f(t, x, v) = -a_1(t)v - a_0(t)x + q(t), \quad t \in [0, T],$$

$$\varphi(x, v) = v - \alpha_0 x - \beta_0, \quad \psi(x, v) = v - \alpha_1 x - \beta_1, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi(x_0, v_0) = v_0 - \alpha_0 x_0 - \beta_0 = 0, \quad \psi(x_T, v_T) = v_T - \alpha_1 x_T - \beta_1 = 0.$$

Ограничимся линейными по фазовым переменным функциями

$$u(t, x, v) = v - \alpha(t)x - \beta(t), \quad \alpha, \beta \in C^1[0, T], \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2.$$

С учетом граничных условий (7.5) фиксируем при $t = 0$ значения $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$. Соответствующую функцию u , которую чуть позже продолжим конкретизировать, обозначим $u = g(t, x, v)$. Аналогично, полагая $\alpha(T) = \alpha_1$, $\beta(T) = \beta_1$, фиксируем $u = h(t, x, v)$ (пока это класс функций). По построению

$$g(0, x, v) = \varphi(x, v), \quad h(T, x, v) = \psi(x, v), \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2,$$

и для искомого решения $x = y(t)$ краевой задачи (7.4), (7.5) выполняются равенства $g(0, x_0, v_0) = 0$, $h(T, x_T, v_T) = 0$ после подстановки $x_0 = y(0)$, $v_0 = \dot{y}(0)$, $x_T = y(T)$, $v_T = \dot{y}(T)$.

Сначала приведем формальный вывод уравнений для функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$. Подставим $u = v - \alpha(t)x - \beta(t)$ в уравнение (7.2):

$$-\dot{\alpha}(t)x - \dot{\beta}(t) - \alpha(t)v - a_1(t)v - a_0(t)x + q(t) = 0. \quad (7.6)$$

Одного уравнения для определения двух функций недостаточно, поэтому, ориентируясь на линейные граничные условия и равенства $g = 0$, $h = 0$ на искомом решении $x = y(t)$, добавим линейную связь $v = \alpha x + \beta$. Подставляя в (7.6) и приравнявая коэффициенты при x и 1 слева и справа, получаем:

$$\begin{aligned} x[-\dot{\alpha} - \alpha^2 - a_1(t)\alpha - a_0(t)] - \dot{\beta} - \alpha\beta - a_1(t)\beta + q(t) &= 0, \\ \dot{\alpha} + \alpha^2 + a_1(t)\alpha + a_0(t) = 0, \quad \dot{\beta} + (\alpha(t) + a_1(t))\beta &= q(t). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Первое ОДУ для функции $\alpha(t)$ — уравнение Риккати, второе (после определения $\alpha(t)$) является линейным по $\beta(t)$. Приведенные построения оправдываются следующим результатом.

Проверим, что если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ ($t \in [0, T]$) — решение системы (7.7), то любое решение уравнения $\dot{z} = \alpha(t)z + \beta(t)$ удовлетворяет исходному уравнению второго порядка (7.4):

$$\begin{aligned} \dot{z} = \alpha z + \beta &\Rightarrow \ddot{z} - \dot{\alpha}z - \alpha\dot{z} - \dot{\beta} = 0, \\ \ddot{z} - [-\alpha^2 - a_1\alpha - a_0]z - \alpha[\alpha z + \beta] + [\alpha + a_1]\beta - q &= 0, \\ \ddot{z} + a_1[\alpha z + \beta] + a_0z - q = \ddot{z} + a_1(t)\dot{z} + a_0(t)z - q(t) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, если фиксировано какое-либо решение системы (7.7) $\{\alpha, \beta\}$, определенное на отрезке времени $[0, T]$, то линейное уравнение $\dot{z} = \alpha(t)z + \beta(t)$ задает однопараметрическое ($z(t_0) = z_0$) семейство решений исходного уравнения (7.4). На этих решениях функция $u(t, x, v) = v - \alpha(t)x - \beta(t)$ ($x = z(t)$, $v = \dot{z}(t)$) принимает постоянное значение при $t \in [0, T]$, равное нулю.

Обозначим через $\alpha^0(t)$, $\beta^0(t)$ — решение системы (7.7) с начальными данными $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$, а через $\alpha^1(t)$, $\beta^1(t)$ — решение с условиями $\alpha(T) = \alpha_1$, $\beta(T) = \beta_1$. Рассмотрим два линейных дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\dot{y} = \alpha^0(t)y + \beta^0(t), \quad \dot{y} = \alpha^1(t)y + \beta^1(t). \quad (7.8)$$

По построению все решения первого образуют однопараметрическое семейство решений исходного уравнения второго порядка (7.4), удовлетворяющих граничному условию при $t = 0$. Аналогично, второе уравнение дает решения с условием при $t = T$.

Искомое решение $x = y(t)$ должно удовлетворять обоим условиям. Возникает несколько возможных вариантов. Первый состоит в сведении граничной задачи к начальной в силу

$$\dot{y}(0) = \alpha_0 y(0) + \beta_0, \quad \dot{y}(0) = \alpha^1(0)y(0) + \beta^1(0).$$

Аналогично можно «перегнать» к $t = T$ первое условие в (7.5):

$$\dot{y}(T) = \alpha^0(T)y(T) + \beta^0(T), \quad \dot{y}(T) = \alpha_1 y(T) + \beta_1.$$

Следует, однако, иметь в виду, что из вычислительных соображений сводить дело к начальной задаче для исходного уравнения второго порядка в общем случае не рекомендуется.

Второй вариант: исключая $\dot{y}(t)$ из системы (7.8), находим

$$y(t) = [\beta^1(t) - \beta^0(t)][\alpha^1(t) - \alpha^0(t)]^{-1}, \quad t \in [0, T].$$

Невырожденность такой процедуры связана не только с продолжимостью решений уравнения Риккати в системе (7.7) на отрезок времени $[0, T]$, но и с неравенством $\alpha^1(t) \neq \alpha^0(t)$.

Третий вариант: после *прямой прогонки* (определения функций α^0, β^0) не искать прогоночные коэффициенты $\alpha^1(t)$ и $\beta^1(t)$, а проводить *обратную прогонку*, т. е. решать задачу

$$\dot{y} = \alpha^0(t)y + \beta^0(t), \quad \dot{y}(T) = \alpha_1 y(T) + \beta_1, \quad t \in [0, T].$$

В данном изложении схемы вычислений не приведены достаточные условия правомерности всех технических преобразований, начиная с предположения о существовании решения краевой задачи и наличии линейной дифференциальной связи первого порядка $\dot{y}(t) = \alpha(t)y(t) + \beta(t)$. В такой ситуации обязательным элементом решения задачи должна служить проверка полученной функции $y(t)$ подстановкой в исходные уравнения. Поскольку уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах, то речь идет о численной реализации алгоритма. Квазилинейная краевая задача исследована в [10].

Глава IV

Линейные системы ОДУ

Основные предположения. В векторной форме система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad A, f \in C(I), \quad I = (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Здесь $A = A_{n \times n} = \{a_{ij}\}$, $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$. В скалярной форме

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Запись $A, f \in C(I)$ означает, что элементы a_{ij} матрицы A и компоненты f_j вектор-функции f непрерывны на интервале I . С оговоркой об односторонних производных вместо I можно рассматривать промежутки $\langle t_1, t_2 \rangle$, в частности отрезок $\bar{I} = [t_1, t_2]$.

Решением называется вектор-функция $x = \varphi(t)$, которая дифференцируема на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq I$ и при подстановке в векторное ОДУ дает тождество по t . Из тождества следует, что производная решения непрерывна. Для любых начальных данных $t_0 \in I$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^\top \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши $x = \varphi(t)$ ($\varphi(t_0) = x_0$) существует, единственно и продолжимо на интервал I (промежутки $\langle t_1, t_2 \rangle$). Далее рассматриваем только полные (продолженные) решения. Как и при изучении линейных уравнений n -го порядка, допускаем комплекснозначность функций вещественной переменной (времени t):

$$a_{ij}, f_j \in C(I \rightarrow \mathbb{C}), \quad x_0 \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \in C^1(I \rightarrow \mathbb{C}^n).$$

Комплексная система сводится к вещественной порядка $2n$:

$$x = u + iv, \quad u = \operatorname{Re} x: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v = \operatorname{Im} x: I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\dot{x} = \dot{u} + i\dot{v} = (A_{\operatorname{Re}} + iA_{\operatorname{Im}})(u + iv) + f_{\operatorname{Re}} + if_{\operatorname{Im}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\text{Re}} & -A_{\text{Im}} \\ A_{\text{Im}} & A_{\text{Re}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\text{Re}} \\ f_{\text{Im}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общие результаты теории вещественных линейных систем ОДУ переносятся на комплекснозначный случай.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

В пределах параграфа считаем $f \equiv 0$: $\dot{x} = A(t)x$. Множество решений $\{\varphi\}$ образует линейное пространство (линейная комбинация решений снова решение). В общем случае речь идет о линейном пространстве (над полем \mathbb{C}) комплекснозначных функций, \mathbb{R} -версия утверждений уточняется лишь по мере необходимости. В изложении следуем схеме главы III. Вектор-функции нумеруем верхними индексами, оставляя нижние для компонент.

Линейная (не)зависимость вектор-функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор-функции $\psi^j: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($1 \leq j \leq m$) называются *линейно независимыми* на интервале I , если

$$c_1\psi^1(t) + \dots + c_m\psi^m(t) \equiv 0 \quad (t \in I) \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Таким образом, равная тождественно нулю (по $t \in I$) линейная комбинация вектор-функций с постоянными коэффициентами $c_j \in \mathbb{C}$ возможна только при $c_j = 0 \forall j$. В противном случае говорят о *линейной зависимости*. Если ψ^j линейно зависимы, то $\forall t_0 \in I$ линейно зависимы векторы $\psi^j(t_0) \in \mathbb{C}^n$. Обратное неверно: в общем случае коэффициенты зависимости векторов $\psi^j(t_0)$ могут зависеть от t_0 , что не допускает определение. В общей теории элементы линейных пространств называются векторами, нули обозначаются одним символом. В этой терминологии приведено обычное определение (не)зависимости векторов (в данном случае вектор-функций). При необходимости интервал I заменяется на промежуток $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Приведем критерий линейной независимости. В \mathbb{C}^n определено скалярное произведение векторов и норма (длина) вектора:

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n, \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Черта обозначает сопряжение. Рассмотрим m векторов $b^j \in \mathbb{C}^n$. Матрица Грама составляется из скалярных произведений:

$$\Gamma = \Gamma(b^1, \dots, b^m) = \begin{pmatrix} \langle b^1, b^1 \rangle, & \dots, & \langle b^1, b^m \rangle \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \langle b^m, b^1 \rangle, & \dots, & \langle b^m, b^m \rangle \end{pmatrix}.$$

Утверждение: векторы b^j линейно независимы $\Leftrightarrow \det \Gamma \neq 0$. Действительно, если векторы b^j линейно зависимы, то

$$\exists c = (c_1, \dots, c_m)^\top \neq 0 \in \mathbb{C}^m: c_1 b^1 + \dots + c_m b^m = 0 \in \mathbb{C}^n.$$

Домножая j -ю строку Γ на c_j и складывая строки, получим

$$(\langle h, b^1 \rangle, \dots, \langle h, b^m \rangle) = (0, \dots, 0), \quad h := \sum c_j b^j.$$

Значит, строки матрицы Γ линейно зависимы и $\det \Gamma = 0$.

Обратно. Если $\det \Gamma = 0$, то строки матрицы линейно зависимы: $(\langle h, b^1 \rangle, \dots, \langle h, b^m \rangle) = (0, \dots, 0)$ ($\exists c_\nu \neq 0$). Домножая j -й элемент этой комбинации строк на c_j и складывая, получаем $\langle h, h \rangle = |h|^2 = 0$, откуда $h = 0$, т. е. векторы b^j зависимы.

Перейдем от векторов $b \in \mathbb{C}^n$ к комплекснозначным вектор-функциям $\psi \in C[t_1, t_2]$. По аналогии определим величину

$$\langle \psi^1, \psi^2 \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \{ \psi_1^1 \bar{\psi}_1^2 + \dots + \psi_n^1 \bar{\psi}_n^2 \} dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi^1(t), \psi^2(t) \rangle dt.$$

Сейчас даже не будем называть это скалярным произведением (чтобы не проверять аксиомы). Для наших целей достаточно, что критерий линейной независимости на отрезке \bar{I} непрерывных вектор-функций $\psi^1, \dots, \psi^m: \bar{I} \rightarrow \mathbb{C}^n$ в терминах матрицы Грама сохраняется: $\det \Gamma(\psi^1, \dots, \psi^m) \neq 0$. Для доказательства достаточно заново просмотреть приведенные выкладки. Прокомментируем только заключительный этап $\langle h, h \rangle = 0 \Rightarrow h = 0$:

$$h(t) = \sum_{j=1}^m c_j \psi^j(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} \langle h(t), h(t) \rangle dt = 0.$$

Под интегралом неотрицательная функция $|h_1(t)|^2 + \dots + |h_m(t)|^2$. Если $|h_\nu(\tau)| \neq 0$ при некоторых ν и τ , то по непрерывности неравенство сохранится в окрестности τ и интеграл окажется положительным. Следовательно, имеет место тождество $h(t) \equiv 0$, что при наличии $c_\nu \neq 0$ означает линейную зависимость вектор-функций ψ^1, \dots, ψ^m на отрезке \bar{I} .

Если рассматривать конечный промежуток $\langle t_1, t_2 \rangle$ и непрерывные вектор-функции, продолжимые (и продолженные) по непрерывности на $\bar{I} = [t_1, t_2]$, то интегральный критерий линейной независимости $\det \Gamma(\psi^1, \dots, \psi^m) \neq 0$ остается в силе. \mathbb{R} -версия заключается лишь в ограничении $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$, $c_j \in \mathbb{R}$.

Общее решение. Решения φ однородной системы ОДУ являются элементами бесконечномерного линейного пространства $C^1(I \rightarrow \mathbb{C}^n)$. Бесконечномерность означает, что можно указать любое число линейно независимых элементов (достаточно, например, в качестве первой компоненты вектор-функций брать t^k). Ближайшая цель — доказать конечномерность векторного пространства решений $\{\varphi\}$ однородного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Линейное пространство решений $\{\varphi\}$ n -мерно.*

Доказательство. Возьмем n линейно независимых векторов b^j , образующих базис \mathbb{C}^n . Фиксируем момент времени $t_0 \in I$ и определим решения $\varphi^j: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ начальными условиями

$$\varphi^j(t_0) = b^j \sim \begin{pmatrix} \varphi_1^j(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n^j(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^j \\ \vdots \\ b_n^j \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Эти решения линейно независимы на интервале I . Действительно, если составить их линейную комбинацию с коэффициентами $c_j = \text{const}$ и приравнять её к нулю на I , то при $t = t_0$ получим

$$c_1 b^1 + \dots + c_n b^n = 0 \in \mathbb{C}^n \Rightarrow c_j = 0 \forall j.$$

Покажем, что произвольное решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ можно представить линейной комбинацией:

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^1(t) + \dots + c_n \varphi^n(t), \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad t \in I. \quad (1.1)$$

Для этого вектор $b = \varphi(t_0)$ разложим по базису b^j и зафиксируем полученный набор коэффициентов c_j . Линейная комбинация $\psi = c_1\varphi^1 + \dots + c_n\varphi^n$ является решением, причем $\psi(t_0) = b$ по построению. По теореме единственности $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, $t \in I$. \square

Совокупность базисных элементов φ^j ($1 \leq j \leq n$) линейного пространства решений $\{\varphi\}$ называется *фундаментальной системой решений*. Любая система n линейно независимых решений фундаментальна, таких систем бесконечно много: в доказательстве фиксировались произвольные $t_0 \in I$ и базис \mathbb{C}^n . Вектор-функция в правой части формулы (1.1) называется *общим решением* однородного векторного уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Аргументами общего решения (при фиксированном базисе $\{\varphi^j\}$) являются время $t \in I$ и произвольные постоянные $c_j \in \mathbb{C}$. Название связано с тем, что $\forall \{c_j\}$ получаем решение и любое решение представимо в форме (1.1). Если матрица $A(t)$ вещественна и нас интересуют лишь вещественные решения ($x_0 \in \mathbb{R}^n$), то при построении фундаментальной системы ограничимся базисом $\{b^j\}$ в \mathbb{R}^n и считаем произвольными постоянными $c_j \in \mathbb{R}$.

Векторная форма $\dot{x} = A(t)x$ записи системы n линейных уравнений первого порядка позволяет без труда перейти к обобщению — матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X, \quad A \in C(I), \quad X = X_{n \times m}. \quad (1.2)$$

Эту запись в соответствии с правилом перемножения матриц понимаем как совокупность m векторных уравнений для n -мерных столбцов X^j матрицы $X = (X^1, \dots, X^m)$:

$$(\dot{X}^1, \dots, \dot{X}^m) = (AX^1, \dots, AX^m) \sim \dot{X}^j = A(t)X^j.$$

Для квадратных матриц ($n = m$) определитель $w(t) = \det X(t)$ называется *определителем Вронского* или *вронскианом*. Это понятие уже встречалось при изучении уравнения n -го порядка

$$\mathcal{L}(D)x \equiv x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0, \quad a_j \in C(I).$$

Напомним, что матрица Вронского и вронскиан для решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ однородного уравнения $\mathcal{L}(D)x = 0$ определялись

как

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w(t) = \det W(t).$$

Перейдем стандартной заменой к системе уравнений первого порядка: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, \dots , $x_n = x^{(n-1)}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Каждому решению $x = \varphi(t)$ скалярного уравнения соответствует в новых переменных векторное решение $\mathbf{x} = (\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})^\top$. Любое решение $\mathbf{x}(t)$ имеет такой вид. Таким образом, определение $w(t) = \det X(t)$ согласуется с определением $w(t) = \det W(t)$ для скалярного линейного однородного уравнения n -го порядка.

Вернемся к исходной однородной системе $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, $t \in I$. Пусть $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ какие-либо n решений. Составим матрицу, расположив вектор-функции $\varphi^j: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ по столбцам:

$$\Phi(t) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n), \quad \Phi = \Phi_{n \times n}, \quad \dot{\Phi} = A(t)\Phi.$$

ТЕОРЕМА 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $w(t) = \det \Phi(t) = 0 \forall t \in I$; 2) $\exists t_0 \in I: w(t_0) = 0$;
- 3) решения $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ линейно зависимы на I .

Доказательство. Следствие 1) \Rightarrow 2) очевидно. Докажем 2) \Rightarrow 3).

Если $w(t_0) = 0$, то столбцы матрицы $\Phi(t_0)$ линейно зависимы:

$$\exists c = (c_1, \dots, c_n)^\top \neq 0: c_1\varphi^1(t_0) + \dots + c_n\varphi^n(t_0) = 0 \in \mathbb{C}^n.$$

Фиксируем этот нетривиальный набор числовых коэффициентов $\{c_j\}$ ($\exists c_\nu \neq 0$). Тогда решение $\psi = c_1\varphi^1 + \dots + c_n\varphi^n$ обращается в нуль при $t = t_0$, как и тривиальное решение $\varphi \equiv 0$. По единственности $\psi \equiv 0$, т.е. решения $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ линейно зависимы на I . В частности, $\forall t \in I$ векторы $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t) \in \mathbb{C}^n$ линейно зависимы и тогда $w(t) \equiv 0$, 3) \Rightarrow 1). \square

Если $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ — фундаментальная система решений, то $\Phi(t) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ называется *фундаментальной матрицей*. При этом из теоремы следует, что $w(t) = \det \Phi(t) \neq 0 \forall t \in I$. Общее решение в векторно-матричной форме записывается как

$$x = c_1 \varphi^1(t) + \dots + c_n \varphi^n(t) = \Phi(t)c, \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Если перейти к явной зависимости от начальных данных в момент времени $t_0 \in I$, то получим общее решение в форме Коши:

$$x(t_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = \Phi(t_0)c, \quad c = \Phi^{-1}(t_0)x_0, \quad x = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Фундаментальная матрица со свойством $\Phi(t_0) = E$ (E — единичная матрица $n \times n$) называется *нормированной при $t = t_0$* . По её столбцам расположены решения $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ с начальными данными $\varphi^j(t_0) = e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$ (единица на j -м месте).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi_*(t)$ — фиксированная фундаментальная матрица. Тогда множество всех фундаментальных матриц описывается формулой $\Phi(t) = \Phi_*(t)B$, где B — произвольная невырожденная постоянная матрица $n \times n$.

Доказательство. Пусть матрица $\Phi(t)$ фундаментальная. Поскольку её столбцы являются решениями, то они раскладываются по базису $\{\varphi_*^1, \dots, \varphi_*^n\}$, образуя столбцы матрицы $\Phi_*(t)$:

$$\varphi^j = c_1^j \varphi_*^1 + \dots + c_n^j \varphi_*^n = (\varphi_*^1, \dots, \varphi_*^n) \cdot (c_1^j, \dots, c_n^j)^\top, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Значит, j -й столбец матрицы B образует набор коэффициентов c_k^j . По свойству определителей получаем следствие:

$$\det \Phi(t) = \det \Phi_*(t) \det B \Rightarrow \det B \neq 0.$$

Обратно: $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_* B = A \Phi_* B = A \Phi$, $\det B \neq 0 \Rightarrow \det \Phi \neq 0 \forall t \in I$. Таким образом, матрица $\Phi(t)$ является фундаментальной. \square

Сопряженное уравнение. Пусть Φ — фундаментальная матрица. Какому уравнению удовлетворяет обратная матрица Φ^{-1} ?

Дифференцируя по t тождество $\Phi^{-1}(t)\Phi(t) \equiv E$, получим:

$$\begin{aligned} D_t(\Phi^{-1}\Phi) &= D_t(\Phi^{-1})\Phi + \Phi^{-1}\dot{\Phi} = 0_{n \times n}, \quad \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Rightarrow D_t(\Phi^{-1}) &= -\Phi^{-1}A, \quad D_t(\Phi^{-1})^* = -A^*(\Phi^{-1})^*. \end{aligned}$$

Здесь $D_t = d/dt$ — оператор дифференцирования по времени (как и точка сверху). Правило дифференцирования произведения матриц имеет обычный вид $(uv)' = u'v + uv'$, что проверяется покомпонентно. Звездочка обозначает сопряженную матрицу: исходная матрица транспонируется, и элементы заменяются на комплексно сопряженные числа. В вещественном случае $*$ = \top .

Уравнение $\dot{y} = -A^*(t)y$ называется *сопряженным* по отношению к исходному $\dot{x} = A(t)x$. В качестве фундаментальной можно взять матрицу $(\Phi^{-1})^*$. Тогда произвольная фундаментальная матрица $\Psi(t)$ сопряженной системы запишется в форме $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^*B$ с постоянной матрицей B , $\det B \neq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} y &= \Psi(t)d, \quad d \in \mathbb{C}^n, \quad \Psi^* = B^*\Phi^{-1}, \quad \Psi^*(t)\Phi(t) = B^*, \\ \langle x(t), y(t) \rangle &= y^*(t)x(t) = (\Psi d)^*\Phi c = d^*B^*c = \text{const}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение решений сопряженных систем не зависит от t ($c, d \in \mathbb{C}^n$). Следовательно, функции $u(t, x) = y^*(t)x$ являются интегралами системы $\dot{x} = A(t)x$. Эти интегралы линейны по фазовым переменным, и среди них только n линейно независимых в $I \times \mathbb{C}^n$. В вещественном случае $*$ заменяется на \top .

Формула Лиувилля. Пусть $X(t)$ — решение матричного уравнения $\dot{X} = A(t)X$, $t \in I$, $X = X_{n \times n}$. Вычислим производную вронскиана $w(t) = \det X(t)$. По столбцам $X(t)$ расположены фазовые векторы решений, так что нас интересует изменение ориентированного объема параллелепипеда, натянутого на эти векторы (динамика фазового объема). Вследствие дифференцируемости $X(t)$ запишем $X(t+h) = X(t) + \dot{X}(t)h + o(h)$ ($h \rightarrow 0$). Здесь каждое слагаемое является матрицей $n \times n$, в том числе $o(h)$ — матрица из «о малых». Заменяя \dot{X} на AX , получим:

$$\begin{aligned} w(t+h) &= \det X(t+h) = \det [X(t) + hA(t)X(t) + o(h)] = \\ &= \det [X + hAX + o(h)X^{-1}X] = \det [E + hA + o(h)] \det X. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее определитель $\det [E + hA + o(h)]$:

$$\begin{vmatrix} 1 + ha_{11} + o, & ha_{12} + o(h), & \dots, & ha_{1n} + o(h) \\ ha_{21} + o(h), & 1 + ha_{22} + o, & \dots, & ha_{2n} + o(h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ha_{n1} + o(h), & ha_{n2} + o(h), & \dots, & 1 + ha_{nn} + o \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + h[a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] + o(h), \quad t \in I = (t_1, t_2).$$

Здесь все $o(h)$ скалярные. Единица выделится в результате умножения диагональных элементов, как и квадратная скобка. Другие слагаемые в этом произведении являются $o(h)$. Аналогично, любое «отступление» от диагонали приводит к слагаемым порядка $o(h)$. Сумма диагональных элементов матрицы называется её *следом* и обозначается как $\text{Tr}A(t)$ (или $\text{Sp}A(t)$).

Итак, получаем следующее асимптотическое выражение:

$$w(t+h) = [1 + h\text{Tr}A(t) + o(h)]w(t) \Rightarrow$$

$$w(t+h) - w(t) = hw(t)\text{Tr}A(t) + o(h).$$

Здесь учтено, что $o(h)w(t) = o(h)$ при фиксированном $t \in I$. Разделив на h и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получаем линейное однородное уравнение $\dot{w}(t) = w(t)\text{Tr}A(t)$, откуда находим

$$w(t) = w(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Tr}A(\tau) d\tau \right\}, \quad t \in I. \quad (1.3)$$

Это и есть *формула Лиувилля*. Из нее непосредственно следует, что либо $w(t_0) = 0$ при некотором значении t_0 (произвольном фиксированном) и тогда $w(t) \equiv 0$, либо $w(t) \neq 0 \forall t \in I$. В последнем случае матрица $\Phi(t)$ невырождена, по её столбцам расположены решения, образующие фундаментальную систему решений однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Обратим внимание на то, что под интегралом только сумма диагональных элементов матрицы A . Как следствие, для скалярного однородного уравнения n -го порядка после его стандартного сведения к линейной системе уравнений первого порядка в формуле (1.3) получаем $\text{Tr}A(t) = -a_{n-1}(t)$.

2. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Формула Коши. Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных ОДУ первого порядка в нормальной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad A, f \in C(I), \quad I = (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Подставим два произвольных решения $\varphi^1, \varphi^2 \in C^1(I \rightarrow \mathbb{C}^n)$ и вычтем из одного тождества по t другое:

$$D_t(\varphi^1(t) - \varphi^2(t)) = A(t)(\varphi^1(t) - \varphi^2(t)) \quad (D_t \equiv d/dt).$$

Разность двух решений есть решение однородного уравнения. Следовательно, общее решение имеет структуру

$$x = x_*(t) + c_1\varphi^1(t) + \dots + c_n\varphi^n(t), \quad t \in I, \quad c_j \in \mathbb{C}^n.$$

Здесь $x_*(t)$ — фиксированное частное решение, $\{\varphi^j\}$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, c_j — произвольные варьируемые постоянные. С помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)_{n \times n}$ общее решение записывается более компактно: $x = x_*(t) + \Phi(t)c$, $c \in \mathbb{C}^n$. Будем предполагать базис $\{\varphi^j\}$ известным. Тогда остается указать способ нахождения какого-либо частного решения. Следуя методу вариации произвольных постоянных, ищем $x_*(t)$ в форме

$$x_*(t) = \Phi(t)c(t), \quad c(\cdot) \in C^1(I \rightarrow \mathbb{C}^n).$$

Вектор-функция $c(t)$ определяется подстановкой $x_*(t)$ в (2.1):

$$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f, \quad \dot{\Phi} = A\Phi \Rightarrow \Phi\dot{c} = f,$$

$$\dot{c} = \Phi^{-1}f, \quad c(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau, \quad t \in I.$$

Здесь t_0 — произвольный фиксированный момент времени из рассматриваемого интервала I . Константу интегрирования не

пишем, поскольку нас интересует одно частное решение. Указанному выбору $c(t)$ соответствует $x_*(t)$ с начальными данными $x_*(t_0) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Формула общего решения принимает вид

$$x(t) = \Phi(t) \left[c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right], \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Если t_0 — начальный момент времени и $x(t_0) = x_0$, то

$$x_0 = \Phi(t_0)c \Rightarrow c = \Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

$$x(t) = K(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in I. \quad (2.2)$$

Здесь введено обозначение $K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$. Удобно брать нормированную при $t = t_0$ фундаментальную матрицу, тогда $K(t, t_0) = \Phi(t)$. Формула (2.2) называется *формулой Коши*.

Итак, если известна фундаментальная система решений линейного однородного векторного дифференциального уравнения, то общее решение неоднородного находится квадратурой.

Множество достижимости. Формула Коши показывает, что $\{x(t)\} = \mathbb{C}^n \forall t \in I$, когда начальные данные x_0 «пробегают» \mathbb{C}^n . В вещественном случае $\{x(t) | x_0 \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$. В теории управления изучается следующая задача. Пусть x_0 — фиксированный вектор (произвольный), а изменяется в определенных пределах неоднородность f . Требуется описать множество $\{x(t)\}$ при $t \neq t_0$. Уточним задачу. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \bar{I} = [0, T]. \quad (2.3)$$

Элементы матриц $A_{n \times n}$ и $B_{n \times r}$ считаем вещественными и непрерывными на отрезке управления $[0, T]$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ фазовое состояние задается вектором $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Допустимыми управлениями считаем кусочно непрерывные вектор-функции времени со значениями в \mathbb{R}^r . Поскольку в силу интегрального характера формулы Коши значения $u(t)$ в точках разрыва t_i (их конечное число и первого рода) не влияют на движение $x(t)$, то удобно доопределять значения $u(t_i)$ по

непрерывности справа (для определенности), за исключением $u(T) = u(T-0)$. Краткое описание допустимых управлений $u(\cdot)$:

$$u \in \mathcal{U} = KC([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r), \quad u(t) = u(t+0), \quad t < T, \quad u(T) = u(T-0).$$

Требуется описать *множество достижимости*:

$$\mathcal{D}_T(x_0) = \{x(T) \mid x(0) = x_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

В частности, важно выяснить, можно ли за время T перевести (произвольное) фазовое состояние x_0 в любое другое состояние $x(T) \in \mathbb{R}^n$ с помощью допустимого управления $u(t)$, $t \in [0, T]$. Такое свойство называется *полной управляемостью*. Перейдем к поиску соответствующего критерия.

Сведем задачу к анализу интегрального уравнения относительно $u(\cdot)$. Выберем фундаментальную матрицу однородной системы нормированной в нуле: $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, $\Phi(0) = E$, $t \in [0, T]$. Вследствие формулы Коши

$$x(T) = \Phi(T)x_0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau,$$

$$\Phi^{-1}(T)x(T) - x_0 = \int_0^T \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Обозначив $z = \Phi^{-1}(T)x(T) - x_0$ и $Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$, получим линейное интегральное соотношение

$$z = \int_0^T Q(\tau)u(\tau) d\tau, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (2.4)$$

Прежде чем анализировать отображение $u(\cdot) \mapsto z$, приведем еще один вывод (2.4) независимо от формулы Коши, не самой легкой для запоминания. По-видимому, легче запомнить интегрирующий множитель Φ^{-1} для исходного уравнения. Предварительно дифференцированием тождества $\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = E$ убедимся, что производная $D_t(\Phi^{-1})$ равна $-\Phi^{-1}A$ ($D_t \equiv d/dt$):

$$D_t(\Phi^{-1})\Phi + \Phi^{-1}\dot{\Phi} = 0_{n \times n}, \quad \dot{\Phi} = A\Phi \Rightarrow D_t(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}A.$$

Домножим уравнение (2.3) слева на матрицу $\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi^{-1}\dot{x} - \Phi^{-1}Ax = \Phi^{-1}Bu \Rightarrow D_t(\Phi^{-1}x) = Qu.$$

Интегрируя, получаем линейное по $u(\cdot)$ уравнение (2.4).

Полная управляемость $(\mathcal{D}_T(x_0) = \mathbb{R}^n)$ системы (2.3) эквивалентна условию $\{z \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\} = \mathbb{R}^n$. Выражение правой части (2.4) показывает, что это свойство не зависит от x_0 .

ТЕОРЕМА 4. Система (2.3) полностью управляема тогда и только тогда, когда строки матрицы $Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$. В терминах матрицы Грама:

$$\mathcal{D}_T = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det \Gamma \neq 0, \quad \Gamma = \int_0^T Q(t)Q^\top(t) dt. \quad (2.5)$$

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что определение линейной (не)зависимости вектор-функций-строк ничем не отличается от определения для вектор-функций-столбцов (над полем \mathbb{R} в контексте задачи). Независимость строк Q_i («длины» r) матрицы $Q_{n \times r}$ на отрезке времени $[0, T]$ означает:

$$c_1Q_1(t) + \dots + c_nQ_n(t) = 0_{1 \times r}, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T] \Rightarrow c_j = 0 \forall j.$$

Элементами матрицы Грама являются интегралы

$$\Gamma_{ij} = \langle Q_i, Q_j \rangle = \int_0^T Q_i(t)Q_j^\top(t) dt, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Подынтегральная функция равна произведению строки на столбец по правилам матричного умножения или скалярному произведению в \mathbb{R}^r вектора-столбца $Q_i^\top(t)$ на столбец $Q_j^\top(t)$. Эквивалентность линейной независимости вектор-функций и условия $\det \Gamma \neq 0$ для соответствующей матрицы Грама показана в § 1.

Доказательство. Пусть $\det \Gamma \neq 0$. Фиксируем любой вектор $x(T) \in \mathbb{R}^n$ и вычислим $z = \Phi^{-1}(T)x(T) - x_0$. Интегральное уравнение (2.4) решаем выбором $u(t) = Q^\top(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$:

$$z = \int_0^T Q(t)u(t) dt = \int_0^T Q(t)Q^\top(t) dt c = \Gamma c \Rightarrow c = \Gamma^{-1}z.$$

Обратно, если строки матрицы $Q(t)$ линейно зависимы на отрезке времени $[0, T]$ ($\det \Gamma = 0$), то найдется ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^n$ из условия $c^\top Q(t) \equiv 0_{1 \times r}$, $t \in [0, T]$. Домножая скалярно на этот вектор уравнение (2.4), получим $c^\top z = 0$. Это уравнение гиперплоскости в \mathbb{R}^n , полной управляемости нет. \square

Не следует думать, что «задача полностью решена». В рамках курса ОДУ не останавливаемся на алгоритмической и вычислительной стороне проблемы управляемости.

Множество управляемости. В приложениях система управления (2.3) обычно появляется в результате линеаризации в окрестности заданного режима. Вектор $x(t)$ имеет смысл отклонения. Рассмотрим задачу перевода начального состояния x_0 в точку $x(T) = 0$ выбором допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ [11]. В левой части (2.4) получаем $z = \Phi^{-1}(T)x(T) - x_0 = -x_0$.

Когда $\det \Gamma \neq 0$ задача решается выбором $u(t) = Q^\top(t)c$:

$$-x_0 = \int_0^T Qu \, dt = \Gamma c \Rightarrow c = -\Gamma^{-1}x_0, \quad u(t) = -Q^\top(t)\Gamma^{-1}x_0.$$

Как правило, необходимо учитывать ограничения на значения управления: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$. Например, $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$, $1 \leq i \leq r$. Задача описания множества достижимости $\mathcal{D}_T(x_0)$ и множества управляемости $\mathcal{R}_T = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x(T) = 0\}$ усложняется.

Ограничимся рассмотрением интегрального неравенства

$$\langle u, u \rangle = \int_0^T u^\top(t)u(t) \, dt = \int_0^T \sum_{i=1}^r u_i^2(t) \, dt \leq h^2, \quad (2.6)$$

которое интерпретируется как «ограничение по энергии». Выбираем $u(t) = -Q^\top(t)\Gamma^{-1}x_0$. Предварительно убедимся, что обратная матрица Γ^{-1} симметрична, как и $\Gamma = \Gamma^\top$:

$$\Gamma^{-1}\Gamma = E \Rightarrow \Gamma^\top(\Gamma^{-1})^\top = \Gamma(\Gamma^{-1})^\top = E \Rightarrow (\Gamma^{-1})^\top = \Gamma^{-1}.$$

Теперь подставляем $u(t) = -Q^\top(t)\Gamma^{-1}x_0$ в ограничение (2.6):

$$x_0^\top \Gamma^{-1} \int_0^T Q(t)Q^\top(t) \, dt \Gamma^{-1}x_0 = x_0^\top \Gamma^{-1}x_0 \leq h^2.$$

Итак, найден эллипсоид отклонений x_0 , которые можно перевести в состояние $x(T) = 0$ при условиях $\det \Gamma \neq 0$, $\langle u, u \rangle \leq h^2$.

3. СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $A = \text{const} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Займемся вначале построением фундаментальной матрицы однородной линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad A = A_{n \times n}, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad t \in I = \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Случай различных собственных чисел матрицы A . Пусть корни λ_j характеристического полинома $\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$ матрицы A различны. Ищем нетривиальное решение (3.1) в форме

$$x = \varphi(t) = e^{\lambda t} b, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}^n \quad (b \neq 0).$$

После подстановки сокращаем экспоненту (но не вектор b): $\lambda b = Ab$. Это алгебраическая задача поиска собственных чисел и собственных векторов. Из $(\lambda E - A)b = 0 \in \mathbb{C}^n$ следует $\chi(\lambda) = 0$. Для каждого корня $\lambda = \lambda_j$ решаем однородную систему алгебраических уравнений относительно компонент вектора $b = b^j \neq 0$. Значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны, так что собственные векторы b^j линейно независимы. Решения $\varphi^j(t) = \exp\{\lambda_j t\} b^j$ линейно независимы (вследствие $\varphi^j(0) = b^j$) и образуют фундаментальную систему. Общим решением является вектор-функция

$$x = \varphi(t, c) = c_1 e^{\lambda_1 t} b^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} b^n, \quad c_j \in \mathbb{C}^n. \quad (3.2)$$

Если в (3.1) сделать замену $x = Py$, $P = (b^1, \dots, b^n)$, то

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow \dot{y} = P^{-1}AP y, \quad P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

и в новых переменных y_j система распадается на n независимых уравнений: $\dot{y}_j = \lambda_j y_j \Rightarrow y_j(t) = c_j \exp\{\lambda_j t\}$, $1 \leq j \leq n$.

Вещественные решения. Пусть матрица A вещественна, и нас интересуют только вещественные решения ($x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$).

По-прежнему предполагаем, что корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического полинома $\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$ различны. В общем решении (3.2) используются базисные решения вида $\varphi(t) = \exp\{\lambda t\} b$. Если λ вещественное число, то и собственный вектор b из решений алгебраической системы $\lambda b = Ab$ выберем вещественным.

Такое решение $\varphi(t)$ оставляем в базисе. Если корень $\lambda = \mu$ комплексный, то в силу вещественности коэффициентов $\chi(\lambda)$ корнем будет и сопряженное число $\bar{\mu}$. Поскольку $\lambda b = Ab \Rightarrow \bar{\lambda} \bar{b} = A\bar{b}$ ($\bar{A} = A$), то в комплексный базис можно включить пару

$$\varphi(t) = e^{\mu t} b, \quad \bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\mu} t} \bar{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Эти сопряженные решения линейно независимы, так как $\mu \neq \bar{\mu}$ и выполняется $\varphi(0) = b, \bar{\varphi}(0) = \bar{b}$ (собственные векторы b, \bar{b} линейно независимы). Заметим, что в силу вещественности A

$$\dot{\varphi} = A\varphi \Rightarrow \operatorname{Re} \dot{\varphi} = A \operatorname{Re} \varphi, \quad \operatorname{Im} \dot{\varphi} = A \operatorname{Im} \varphi,$$

т. е. функции $\operatorname{Re} \varphi(t)$ и $\operatorname{Im} \varphi(t)$ — тоже решения. Решение $\bar{\varphi}$ новых вещественных решений не дает: $\operatorname{Re} \varphi = \operatorname{Re} \bar{\varphi}, \operatorname{Im} \varphi = -\operatorname{Im} \bar{\varphi}$. Исключаем из базиса комплексно сопряженную пару $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ и заменяем её на вещественную пару $\{\operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi\}$. В итоге в базисе n вещественных решений. Их линейная комбинация с произвольными вещественными постоянными $c_j \in \mathbb{R}$ и будет общим вещественным решением однородной системы $\dot{x} = Ax$. Заметим, что вследствие формулы Эйлера $\exp\{i\nu\} = \cos \nu + i \sin \nu$ ($\nu = \operatorname{Im} \mu$) и в решениях $\operatorname{Re} \varphi$ и $\operatorname{Im} \varphi$ появятся синусы и косинусы.

В приведенных рассуждениях имеется пробел: опущено доказательство линейной независимости над полем \mathbb{R} полученных n вещественных решений. Это делается аналогично переходу от комплексно сопряженного базиса к вещественному для линейного однородного уравнения (глава III). Здесь для разнообразия приведем другое рассуждение. Вещественное решение характеризуется условием $\bar{x}(t) = x(t)$. Считаем, что комплексный базис в общем решении (3.2) построен по указанному выше принципу:

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow b \in \mathbb{R}^n, \quad \{\mu, \bar{\mu}\} \subset \mathbb{C} \Rightarrow \{b, \bar{b}\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Записав равенство $\bar{x} = x$, получаем (в силу линейной независимости экспонент), что при вещественных экспонентах должны быть вещественные постоянные ($c = \bar{c}$), а при сопряженных — сопряженные. Чтобы «избавиться» от мнимой единицы остается

преобразовать сумму сопряженных слагаемых:

$$\begin{aligned} c &= \xi + i\eta, \quad \mu = \alpha + i\beta, \quad b = f + ih \quad (\xi, \eta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, h \in \mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow ce^{\mu t}b + \bar{c}e^{\bar{\mu}t}\bar{b} &= (\xi + i\eta)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(f + ih) + \dots \end{aligned}$$

Предлагается завершить выкладки в порядке упражнения. Поскольку складываются сопряженные числа, то останется вещественное выражение с двумя произвольными вещественными постоянными ξ, η . В не столь подробной записи: $\varphi = \exp\{\mu t\}b$,

$$\begin{aligned} (\xi + i\eta)(\operatorname{Re} \varphi + i \operatorname{Im} \varphi) + (\xi - i\eta)(\operatorname{Re} \varphi - i \operatorname{Im} \varphi) &= \\ = 2\xi \operatorname{Re} \varphi - 2\eta \operatorname{Im} \varphi, \quad 2\xi = c_1 \in \mathbb{R}, \quad -2\eta = c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Общий случай. Матричная экспонента. Изложим общий метод решения линейной системы (3.1), пригодный и для случая кратных корней характеристического полинома. Фиксируем произвольный отрезок времени $[t_1, t_2]$, начальные данные $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{C}^n$ ($t_0 \in [t_1, t_2]$) и перейдем к интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Ax(\tau) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Метод последовательных приближений изучался в главе I. Здесь лишь конкретизируем его для векторного уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \varphi^0(t) &= x_0 = x(t_0), \quad \varphi^{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A\varphi^k(\tau) d\tau, \\ \varphi^1(t) &= x_0 + Ax_0(t - t_0) = [E + (t - t_0)A]x_0, \dots, \\ \varphi^k(t) &= \left[E + (t - t_0)A + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k \right] x_0, \dots \end{aligned}$$

Последовательность матриц в квадратных скобках (конечных сумм) является сходящейся при $k \rightarrow +\infty$. Действительно, если брать начальные данные $x_0 = e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ (различаем по контексту экспоненту и элементы канонического базиса \mathbb{R}^n),

то метод последовательных приближений приводит к сходимости последовательности j -х столбцов, равномерной по $t \in [t_1, t_2]$. Итак, сходится матричный ряд $([\dots])$ — его частичная сумма)

$$E + (t - t_0)A + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k + \dots$$

Этот ряд аналогичен $1 + x + \dots + x^k/k! + \dots = \exp\{x\}$, что дает основание назвать его сумму *матричной экспонентой* (число является матрицей 1×1). Сохраняя привычное обозначение, приходим к следующему представлению общего решения:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0, \quad x_0 = x(t_0) \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Здесь мы учли, что отрезок $[t_1, t_2]$ фиксировался произвольным.

Если $x_0 = e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, то получаем слева решение с начальными вектором $x(t_0) = e^j$, а справа — j -й столбец матрицы $\exp\{(t - t_0)A\}$. Следовательно, по столбцам экспоненты расположена фундаментальная система решений и для фундаментальной матрицы, нормированной при $t = t_0$, имеем

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi(t_0) = E \Rightarrow \Phi(t) = e^{(t-t_0)A}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Как следствие, получаем привычное правило дифференцирования

$$D_t e^{(t-t_0)A} = A e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)A} A.$$

Второе равенство следует из перестановочности $AA^k = A^kA$.

Докажем групповое свойство матричной экспоненты

$$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} e^{t_2A} = e^{t_2A} e^{t_1A}. \quad (3.4)$$

Фиксируем произвольный x_0 и рассмотрим вектор-функции

$$\varphi^1(t) = e^{(t+t_2)A} x_0, \quad \varphi^2(t) = e^{tA} [e^{t_2A} x_0].$$

Для удобства обозначим $t_2 = -t_0$, $y_0 = \exp\{t_2A\}x_0$. Тогда $\varphi^1(t)$ — решение с начальными данными $\varphi^1(t_0) = x_0$. При

$t = 0$ имеем $\varphi^1(0) = y_0$. Аналогично $\varphi^2(t) = \exp\{tA\}y_0$ — решение с условием $\varphi^2(0) = y_0$ (формально можно переписать $\varphi^2(t) = \exp\{(t - t_0)A\}y_0$, считая $t_0 = 0$). По единственности

$$\varphi^1(0) = \varphi^2(0) \Rightarrow \varphi^1(t) \equiv \varphi^2(t).$$

При $t = t_1$ получаем $\exp\{(t_1 + t_2)A\}x_0 = \exp\{t_1A\} \exp\{t_2A\}x_0$. Вектор x_0 произволен, так что первое равенство в (3.4) выполнено. Второе тривиально следует из $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$. В частности, при $t = t_1 = -t_2$ получаем формулу обращения экспоненты:

$$e^{At}e^{-At} = E \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

Предостережение: в общем случае $\exp\{A + B\} \neq \exp\{A\} \exp\{B\}$ (равенство гарантируется коммутированием $AB = BA$).

Функции от матриц. В матричном анализе разработана общая теория функций от матриц и матричных уравнений. В приложениях полезны не только экспоненты, но и матричные логарифмы, корни... Кратко остановимся на основной идее. Рассмотрим скалярную функцию, представимую степенным рядом:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots, \quad |x| < R, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Для матрицы $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ по определению положим

$$f(B) = a_0E + a_1B + \dots + a_nB^n + \dots$$

Чтобы такое определение было корректным, необходимо позаботиться о сходимости матричного ряда. Его сумма и обозначается как $f(B)$. Для простоты ограничимся случаем, когда у матрицы B все собственные числа различны. Напомним, что собственное число $\lambda \in \mathbb{C}$ и соответствующий ему собственный вектор $b \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ определяются соотношением $Bb = \lambda b$. Даже если матрица B вещественна, то в общем случае λ, b комплексные. Это одна из причин, по которой теория линейных ОДУ излагается на языке комплекснозначных функций. Исторически целые разделы линейной алгебры развивались в связи с исследованиями систем линейных дифференциальных уравнений. Характеристическое уравнение длительное время называлось вековым

(в терминологии небесной механики). Почему в алгебре подробно изучается преобразование подобия $P^{-1}AP$? В контексте ОДУ это следствие линейной замены переменных:

$$\dot{x} = Ax, \quad x = Py \Rightarrow \dot{y} = P^{-1}APy.$$

Если собственные числа λ_j матрицы B различны, то преобразованием подобия она сводится к диагональной:

$$\exists P = P_{n \times n}, \quad \det P \neq 0, \quad P^{-1}BP = \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}.$$

При этом $BP = (BP^1, \dots, BP^n) = P\Lambda = (\lambda_1 P^1, \dots, \lambda_n P^n)$, так что столбцы матрицы преобразования P суть собственные векторы. Они линейно независимы, когда все λ_j различны.

Подставим $B = P\Lambda P^{-1}$ в формальный ряд для $f(B)$:

$$\begin{aligned} f(B) &= a_0 E + a_1 P\Lambda P^{-1} + a_2 (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) + \dots \\ &= a_0 P P^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + a_2 P\Lambda^2 P^{-1} + \dots \\ &= P \text{diag} \{ f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n) \} P^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что матрица $f(B)$ определена, если собственные числа находятся в круге сходимости: $|\lambda_j| < R$. Результат верен и в общем случае (используется жорданова форма матрицы).

«Конечное» представление матричной экспоненты. Если пользоваться непосредственно определением матричной экспоненты $\exp\{(t-t_0)A\}$ как суммы ряда, то формула общего решения $x(t) = \exp\{(t-t_0)A\}x_0$ ($x_0 = x(t_0) \in \mathbb{C}^n$) выглядит неконструктивно. Попытаемся найти «конечное» представление матричной экспоненты. Приведем сначала наводящие соображения.

Для упрощения обозначений далее принимаем t_0 за начало отсчета времени ($t_0 = 0$). Тогда общее решение имеет вид $x(t) = \exp\{At\}x_0$ ($x_0 = x(0)$). Матрица $\Phi(t) = \exp\{At\}$ является фундаментальной, нормированной в нуле: $\dot{\Phi} = A\Phi$, $\Phi(0) = E$.

Характеристический полином матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\chi(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0$$

Тогда по теореме единственности фундаментальная матрица $\Phi(t) = \exp\{At\}$ совпадает с правой частью (3.5).

Итак, рассмотрим задачу Коши для коэффициентов α_j :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_1(0) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1}(0) = 0.$$

Матрица системы ОДУ (с точностью до транспонирования) — известная из курса алгебры *сопровождающая матрица* характеристического полинома $\chi(\lambda)$. Сведем систему к скалярному линейному однородному уравнению n -го порядка. Положим $\psi(t) = \alpha_{n-1}(t)$. Тогда из последнего уравнения системы (3.6) находим $\dot{\psi} = \alpha_{n-2} - p_{n-1}\psi$, $\alpha_{n-2} = \dot{\psi} + p_{n-1}\psi$. Подставим это выражение функции $\alpha_{n-2}(t)$ в предпоследнее уравнение:

$$\dot{\alpha}_{n-2} = \alpha_{n-3} - p_{n-2}\alpha_{n-1} \Rightarrow \ddot{\psi} + p_{n-1}\dot{\psi} + p_{n-2}\psi = \alpha_{n-3}.$$

Продолжая этот процесс снизу вверх, получим скалярное линейное однородное уравнение n -го порядка $\chi(D)\psi = 0$:

$$\psi^{(n)}(t) + p_{n-1}\psi^{(n-1)}(t) + \dots + p_0\psi(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Заметим, что характеристический полином уравнения (3.7) совпадает с $\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$. Что касается начальных данных, то

$$\begin{aligned} \psi(0) = \alpha_{n-1}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \alpha_{n-2}(0) - p_{n-1}\psi(0) = 0, \\ \dots, \quad \psi^{(n-2)}(0) = 0, \quad \psi^{(n-1)}(0) = \alpha_0(0) = 1. \end{aligned}$$

Такая задача Коши изучена в главе III. Решение существует, единственно и является квазиполиномом. Функции $\alpha_j(t)$ — линейные комбинации $\psi(t)$ и её производных, так что они тоже квазиполиномы. Экспоненты имеют показатели λ_j (собственные числа матрицы A), а степени полиномов при $\exp\{\lambda_j t\}$ не превышают $m_j - 1$, где m_j — кратность корня λ_j характеристического полинома $\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$. \square

Вместо характеристического можно использовать минимальный аннулирующий полином матрицы A , если он известен.

Из доказательства извлекаем прием для практических вычислений (метод Эйлера). По различным корням $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ характеристического полинома составляем вектор-функции

$$\varphi^i(t) = p^i(t)e^{\lambda_i t}, \quad \deg p_j^i \leq m_i - 1, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq n,$$

с неопределенными коэффициентами полиномов $p_j^i(t)$ (компонент векторных полиномов p^i). После подстановки в $\dot{x} = Ax$ и сокращения экспоненты, получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов (m_i штук из них останутся произвольными). Общее решение будет суммой $\varphi^i(t)$, причем количество произвольных постоянных будет $m_1 + \dots + m_s = n$ [3, 5, 16, 24]. Они уточняются, например, начальными данными.

Что касается выделения всех вещественных решений в случае $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то, по-видимому, рациональнее построить общее комплексное решение и затем добавить условие $x = \bar{x}$.

Неоднородное уравнение. Напомним, что общее решение неоднородной системы $\dot{x} = Ax + f$ задается формулой Коши:

$$x(t) = K(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s).$$

Удобно брать нормированную при $t = t_0$ фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, тогда $K(t, t_0) = \Phi(t)$. В случае $A(t) = A = \text{const}$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}f(\tau) d\tau, \quad x_0 = x(t_0).$$

Действительно, нормированной при $t = t_0$ фундаментальной матрицей является матричная экспонента $\Phi(t) = \exp\{(t - t_0)A\}$,

$$K(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{(t-t_0)A}e^{(t_0-\tau)A} = e^{(t-\tau)A}.$$

Если $f(t)$ — векторный квазиполином, то можно пользоваться аналогом метода неопределенных коэффициентов, изложенного в главе III. В силу линейности выполняется принцип суперпозиции, так что ограничимся одним векторным слагаемым:

$$f(t) = e^{\sigma t}p(t), \quad \deg p_j \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Пусть показатель σ не корень характеристического полинома $\chi(\lambda)$ ($\sigma \neq \lambda_j$, нерезонансный случай). Тогда ищем частное решение в такой же форме: $x_*(t) = \exp\{\sigma t\}q(t)$, $\deg q_j \leq m$. Подставляя в исходное уравнение $\dot{x} = Ax + f$, получим

$$(\sigma E - A)q(t) = p(t) - \dot{q}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Матрица $\sigma E - A$ невырождена, поскольку $\sigma \neq \lambda_j$. Приравнивая слева и справа коэффициенты при t^m, t^{m-1}, \dots , последовательно находим все векторные коэффициенты полинома $q(t)$.

В заключение параграфа вернемся к анализу свойства полной управляемости линейной системы в стационарном случае:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \quad a_{ij}, b_{ks} \in \mathbb{R}.$$

Интегральное уравнение для управления $u(\cdot)$ примет вид

$$z = \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \gamma_j, \quad \gamma_j := \int_0^T \alpha(-t) u(t) dt.$$

Таким образом, в силу $\gamma_j \in \mathbb{R}^r$ вектор $z = \exp\{-AT\}x(T) - x_0$ является линейной комбинацией столбцов матрицы

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad K = K_{n \times nr}.$$

Если выполнено неравенство $\text{rank } K < n$, то полной управляемости ($\{z | u \in \mathcal{U}\} = \mathbb{R}^n$) быть не может. Матрица K играет важную роль в линейной теории управления и называется *матрицей управляемости* (*матрицей Калмана*). На самом деле условие $\text{rank } K = n$ не только необходимо, но и достаточно для полной управляемости. Здесь на этом не останавливаемся.

4. СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Однородные системы. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение с непрерывной периодической матрицей:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad a_{ij} \in C(\mathbb{R}), \quad a_{ij}(t + \omega) = a_{ij}(t), \quad \omega > 0. \quad (4.1)$$

Поставим вопрос о существовании ω -периодического решения (помимо тривиального $x(t) \equiv 0$). Иначе, будет ли в ω -периодической системе наблюдаться ω -периодическое движение?

Важным свойством ω -периодических систем является следующий факт. Если $x = \varphi(t)$ — решение (полное, $t \in \mathbb{R}$), то вектор-функция $\psi(t) = \varphi(t + \omega)$ — тоже решение. Проверим:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\varphi(t + \omega)}{dt} = \frac{d\varphi(t + \omega)}{d(t + \omega)} = A(t + \omega)\varphi(t + \omega) = A(t)\psi(t).$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица, нормированная в нуле:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = E.$$

По столбцам расположены решения $\varphi^i(t)$ с начальными данными $\varphi^i(0) = e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$, образующие фундаментальную систему. Рассмотрим матрицу $\Psi(t) = \Phi(t + \omega)$. Столбцы являются решениями. Из $\Psi(-\omega) = \Phi(0) = E$ заключаем, что $\Psi(t)$ невырождена и, следовательно, она фундаментальная матрица. Фундаментальные матрицы связаны неособым множителем: $\Psi(t) = \Phi(t)B$, $\det B_{n \times n} \neq 0$. Полагая $t = 0$, получаем

$$\Psi(0) = \Phi(\omega) = \Phi(0)B \Rightarrow B = \Phi(\omega) \Rightarrow \Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega).$$

Итак, периодичность $A(t)$ приводит к мультипликативному свойству матрицы $\Phi(t)$. Матрицу $\Phi(\omega)$ называют *матрицей монодромии*, а её собственные числа — *мультипликаторами*.

Замечание 1. Возьмем другую фундаментальную матрицу $\tilde{\Phi}(t)$ и определим матрицу монодромии M аналогичным условием $\tilde{\Phi}(t + \omega) = \tilde{\Phi}(t)M$. Поскольку $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)P$ ($\det P \neq 0$), то

$$\Phi(t + \omega)P = \Phi(t)PM, \quad \Phi(t + \omega) = \Phi(t)PMP^{-1} \Rightarrow PMP^{-1} = \Phi(\omega).$$

Матрицы монодромии, определенные различными фундаментальными матрицами, подобны. Следовательно, мультипликаторы определены однозначно (как корни характеристического многочлена): $|\lambda E - M| = |P(\lambda E - M)P^{-1}| = |\lambda E - \Phi(\omega)|$.

Название мультипликатор объясняется следующим свойством.

ТЕОРЕМА 6. Число $\mu \in \mathbb{C}$ является мультипликатором тогда и только тогда, когда найдется нетривиальное решение φ ($\varphi(t) \neq 0 \forall t$), для которого выполняется $\varphi(t+\omega) = \mu\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По определению мультипликатора имеем соотношение $\mu b = \Phi(\omega)b$, где $b \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ — соответствующий собственный вектор. Возьмем решение $x = \varphi(t)$ с начальными данными $\varphi(0) = b$. Тогда выполнена цепочка равенств

$$\varphi(t + \omega) = \Phi(t + \omega)b = \Phi(t)\Phi(\omega)b = \mu\Phi(t)b = \mu\varphi(t).$$

Обратно, тождество $\varphi(t + \omega) = \mu\varphi(t)$ по $t \in \mathbb{R}$ влечет

$$\Phi(t + \omega)\varphi(0) = \mu\Phi(t)\varphi(0) \Rightarrow (t = 0) \Phi(\omega)\varphi(0) = \mu\varphi(0).$$

Поскольку по выбору $\varphi(0) \neq 0$ (иначе $\varphi(t) \equiv 0$), то μ — собственное число матрицы монодромии $\Phi(\omega)$, т. е. мультипликатор. \square

Следствие: нетривиальное ω -периодическое решение существует только при наличии мультипликатора $\mu = 1$. Итак, поставленный вначале параграфа вопрос решается вычислением собственных чисел матрицы монодромии. Отметим, что и в случае $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ мультипликаторы μ_1, \dots, μ_n , вообще говоря, комплексные, не исключаются и кратные значения. Вследствие формулы Лиувилля мультипликаторы связаны соотношением

$$\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n = \det \Phi(\omega) = \exp \left\{ \int_0^\omega \text{Tr} A(\tau) d\tau \right\}.$$

Приводимость. Непрерывные ω -периодические системы *приводимы* в том смысле, что существует замена $x = P(t)y$ ($P \in C^1$, $\det P \neq 0$), при которой в новых переменных система запишется в виде $\dot{y} = Ry$ с постоянной матрицей R . Это следует из *теоремы Флоке* [3, 6, 14]: фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ можно представить в форме $\Phi(t) = P(t) \exp\{Rt\}$, где $P \in C^1(\mathbb{R})$ является ω -периодической матрицей, а R не зависит от t . В общем случае матрицы P и R комплексные, даже если A вещественная.

Не углубляясь в теорию функций от матриц, укажем лишь, что достаточно взять $R = \omega^{-1} \text{Ln} \Phi(\omega)$, $P(t) = \Phi(t) \exp\{-Rt\}$.

Матричный логарифм $\text{Ln } B$ неособой матрицы $B_{n \times n}$ определяется условием $\exp\{\text{Ln } B\} = B$. Единственности нет даже при $n = 1$ ($B \in \mathbb{C}, B \neq 0$): $\text{Ln } B = \ln |B| + i \arg B + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Проверим, что при таком выборе матриц R и P справедливо указанное в теореме Флоке представление матрицы $\Phi(t)$. Равенство $\Phi(t) = P(t) \exp\{Rt\}$ и включение $P \in C^1(\mathbb{R})$ верны по построению. Покажем ω -периодичность P : $P(t + \omega) =$

$$= \Phi(t + \omega)e^{-(\omega+t)R} = \Phi(t)\Phi(\omega)e^{-\text{Ln } \Phi(\omega)}e^{-Rt} = \Phi(t)e^{-Rt} = P(t).$$

Докажем теперь, что замена $x = P(t)y$ ($P \in C^1, \det P \neq 0$) приводит исходное уравнение (4.1) к $\dot{y} = Ry$:

$$\dot{x} = \dot{P}y + P\dot{y} = [\dot{\Phi}e^{-Rt} - \Phi Re^{-Rt}]y + P\dot{y},$$

$$Ax = APy = \dot{x} = [A\Phi e^{-Rt} - \Phi e^{-Rt}R]y + P\dot{y},$$

$$P = \Phi e^{-Rt} \Rightarrow APy = [AP - PR]y + P\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = Ry.$$

Неоднородные системы. Рассмотрим векторное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad A(t + \omega) = A(t), \quad f(t + \omega) = f(t). \quad (4.2)$$

Элементы матрицы A и компоненты вектора f непрерывны на \mathbb{R} . Существуют ли ω -периодическое решение?

ТЕОРЕМА 7. *Если среди мультипликаторов нет единицы, то уравнение (4.2) имеет единственное ω -периодическое решение.*

Доказательство. Для ω -периодичности решения $x = \varphi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\omega) = \varphi(0)$. Необходимость очевидна ($t = 0$). Докажем достаточность. Рассмотрим вектор-функцию $\psi(t) = \varphi(t + \omega)$. Она будет решением — проверяется непосредственно, как и в однородном случае. По теореме единственности решения начальной задачи из $\psi(0) = \varphi(\omega) = \varphi(0)$ следует $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, т. е. $\varphi(t + \omega) = \varphi(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Запишем условие периодичности решения $\varphi(\omega) = \varphi(0)$ с помощью формулы Коши: $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \Phi(0) = E, x_0 = \varphi(0)$,

$$\varphi(\omega) = \varphi(0) \sim \Phi(\omega)x_0 + \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau = x_0.$$

При векторе x_0 получаем матрицу $E - \Phi(\omega)$. Преобразованием подобия она приводится к треугольному виду с диагональными элементами $1 - \mu_j$. По условию теоремы $\mu_j \neq 1$ ($1 \leq j \leq n$), так что $\det(E - \Phi(\omega)) = \prod(1 - \mu_j) \neq 0$ и вектор x_0 для ω -периодического решения определяется однозначно. \square

Если однородная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет нетривиальное ω -периодическое решение ($\exists \mu = 1$), то матрица $E - \Phi(\omega)$ вырождена и линейная алгебраическая система относительно вектора x_0 либо несовместна (нет ω -периодического решения), либо имеет бесконечно много ω -периодических решений.

5. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Традиционно в курсе ОДУ изучается в основном задача Коши. Краевые задачи более детально рассматриваются в курсе математической физики. В данном параграфе кратко остановимся на случае, когда известных величин меньше размерности фазового вектора, но они *наблюдаются* на некотором отрезке времени.

Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается вещественным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad A, f \in C(\bar{I}), \quad \bar{I} = [0, T]. \quad (5.1)$$

Запись $A, f \in C$ подразумевает, что все компоненты $a_{ij}(t)$ матрицы $A_{n \times n}$ и компоненты $f_j(t)$ вектор-функции $f_{n \times 1}$ непрерывны на рассматриваемом отрезке времени $[0, T]$.

Начальные данные $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ неизвестны. По результатам наблюдений (измерений) доступна информация $y(t) \in \mathbb{R}^m$:

$$y(t) = G(t)x(t) + g(t), \quad t \in \Theta = [0, \vartheta], \quad \vartheta \leq T, \quad m < n. \quad (5.2)$$

Предполагаем включение $G_{m \times n}, g_{m \times 1} \in C(\bar{I})$. Например, если $G^\top = (e_1, \dots, e_m)$, где $\{e_i\}_1^n$ — канонический базис \mathbb{R}^n , и $g = 0$, то на отрезке наблюдения Θ известны первые m фазовых координат $y_i(t) = x_i(t)$. Количество m измеряемых величин меньше n , но это в определенной мере компенсируется учетом динамики (5.1) и информации $y(t)$, $t \in \Theta$. Непосредственно из

линейного уравнения (5.2) полный фазовый вектор $x(t)$ по $y(t)$ определить нельзя. Считаем неоднородности $f(t), g(t)$ известными. Значительно более сложный случай, когда вектор-функции $f(t), g(t)$ интерпретируются как возмущение уравнений движения и ошибки измерений, известные лишь в оценочном плане, рассматривается в курсе теории управления.

Для однозначного определения траектории движения достаточно знать фазовое состояние $x(s)$ в какой-либо момент времени $s \in [0, T]$. Будем интересоваться $x(T)$ (что не является принципиальным ограничением). В приложениях обычно идет накопление информации на отрезке времени Θ , и по этой предыстории вычисляется значение $x(T)$. В зависимости от задачи промежуток времени $[T - \vartheta, T]$ является горизонтом прогноза либо необходим для реализации алгоритма обработки измерений. В случае $\vartheta = T$ в масштабе реального времени считается, что вычисления проводятся достаточно быстро.

Ясно, что определение фазового вектора $x(T)$ эквивалентно определению набора проекций $h^\top x(T)$, когда вектор h «пробегает» базис \mathbb{R}^n . В связи с этим сформулируем следующую задачу.

Для данного (фиксированного) вектора $h \in \mathbb{R}^n$ требуется построить оператор восстановления проекции вектора $x_T = x(T)$:

$$h^\top x_T = \mathcal{F}(y(\cdot)), \quad y(\cdot; T, x_T): \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x_T \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3)$$

При необходимости можно ограничиться $h: |h| = 1$. Подчеркнем, что речь идет об операции: при любых начальных данных (T, x_T) по соответствующей согласно (5.1), (5.2) информации $y(t) = y(t; T, x_T)$ на отрезке наблюдения Θ (априори вектор x_T неизвестен) должна однозначно определяться проекция $h^\top x_T$.

Условно задача разбивается на две. При каких ограничениях восстановление проекции фазового вектора возможно? Если оператор \mathcal{F} существует, то проекция $\varphi(x) = h^\top x$ называется *наблюдаемой* или *прогнозируемой* (когда акцентируем внимание на условии $\vartheta < T$). Как среди решений задачи (5.3) выбрать подходящий с вычислительной точки зрения оператор \mathcal{F} ?

Итак, пусть $f(t), g(t)$ известны. Напомним формулу Коши. Домножим уравнение (5.1) на $\Phi^{-1}(t)$, где $\Phi(t)$ — нормированная

в нуле фундаментальная матрица однородной системы:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi(0) = E_n, \quad \Phi^{-1}\dot{x} - \Phi^{-1}Ax = \Phi^{-1}f.$$

Левая часть есть производная $D_t(\Phi^{-1}x)$ ($D_t \equiv d/dt$) в силу

$$D_t(\Phi^{-1}\Phi) = D_t(\Phi^{-1})\Phi + \Phi^{-1}A\Phi = 0 \Rightarrow D_t(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}A.$$

Интегрируя в пределах от T до t , приходим к результату:

$$D_t(\Phi^{-1}x) = \Phi^{-1}f \Rightarrow x(t) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(T) x_T + \int_T^t \Phi^{-1}f \, d\tau \right].$$

После подстановки в (5.2) получим (с учетом $\int_a^b = -\int_b^a$)

$$\tilde{y}(t) := y(t) - g(t) + G(t)\Phi(t) \int_t^T \dots \, d\tau = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)x_T.$$

Значит, если корректировать измерения $y(t)$ (поправка вычисляется заранее и не зависит от x_T), то без ограничения общности можно вместо (5.1), (5.2) рассматривать однородную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = G(t)x(t), \quad (5.4)$$

$$y(t) = y(t; T, x_T) = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)x_T, \quad t \in \Theta.$$

Итак, отмечая то, что разрешимость задачи (5.3) определяется только свойствами пары (A, G) , переходим к исследованию однородной системы наблюдения (5.4) — формально $f = 0, g = 0$.

Критерий наблюдаемости. Обозначим через

$$\mathcal{Y} = \{y(\cdot; T, x_T) \mid x_T \in \mathbb{R}^n\}, \quad t \in \Theta \subseteq [0, T],$$

множество возможных измерений, $y(t) = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)x_T$. Очевидно, \mathcal{Y} — линейное пространство ($\dim \leq n$), поскольку $y(\cdot)$ является комбинацией столбцов $m \times n$ -матрицы $\Psi(\cdot)$, $\Psi(t) = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)$, с вектором коэффициентов $x_T \in \mathbb{R}^n$.

Наблюдаемость (прогнозируемость) проекции $\varphi(x) = h^\top x$ означает тождество $h^\top x_T \equiv \mathcal{F}(y(\cdot))$ по x_T , где вектор-функция

$y(\cdot) = y(\cdot; T, x_T) \in \mathcal{Y}$. Оператор \mathcal{F} априори неизвестен и подлежит определению. Если допускается $y(\cdot; T, x_T^1) = y(\cdot; T, x_T^2)$ при $x_T^1 \neq x_T^2$, то обязательно должно быть $h^\top x_T^1 = h^\top x_T^2$. Ненаблюдаемость проекции $\varphi(x) = h^\top x$ означает существование таких различных $x_T^{1,2}$, что соответствующие выходы $y^{1,2}(\cdot)$ равны, а $h^\top x_T^1 \neq h^\top x_T^2$. Тогда, зная $y^i(\cdot)$ (но не порождающие их x_T^i), нельзя однозначно указать значение проекции φ .

Выясним условия существования операции $\mathcal{F} \forall h$. Иными словами, нас интересуют необходимые и достаточные условия взаимной однозначности $y(\cdot) = y(\cdot; T, x_T) \leftrightarrow x_T \in \mathbb{R}^n$, позволяющей однозначно восстанавливать фазовый вектор x_T по информации $y(\cdot)$. Приведем предварительные рассуждения. Канонический базис \mathbb{R}^n при линейном отображении $\Lambda: x_T \mapsto y(\cdot)$ переходит в столбцы матрицы $\Psi(\cdot)$, которые являются непрерывными вектор-функциями на отрезке Θ . Если столбцы линейно независимы, т.е. $\Psi(t)c = 0 \forall t \in \Theta \Rightarrow c = 0 \in \mathbb{R}^n$, то $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{L}(\Psi(\cdot)) = n$ и линейное отображение Λ обратимо — имеет место *полная наблюдаемость (прогнозируемость)*. Символ \mathcal{L} обозначает линейную оболочку столбцов матрицы.

ТЕОРЕМА 8. *Пара (A, G) (линейная система (5.4)) полностью наблюдаема ($x_T \leftrightarrow y(\cdot) \in \mathcal{Y}$) тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $\Psi(t)$ линейно независимы на отрезке времени Θ .*

Напомним, что $y(t) = \Psi(t)x_T$, $\Psi(t) = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)$. Невырожденный множитель $\Phi^{-1}(T)$ не меняет свойства (не)зависимости столбцов (в силу $\Psi(t)c = G(t)\Phi(t)\tilde{c}$, $c = \Phi(T)\tilde{c}$), так что в формулировке теоремы вместо Ψ можно указать матрицу $G\Phi$.

Доказательство. В терминах матрицы Грама линейная независимость столбцов $\Psi(t)$ на отрезке Θ эквивалентна условию

$$\det \Gamma \neq 0, \quad \Gamma_{n \times n} = \langle \Psi, \Psi \rangle = \int_{\Theta} \Psi^\top(t) \Psi(t) dt.$$

Пусть $\det \Gamma \neq 0$. Тогда можно однозначно вычислить x_T по $y(\cdot)$:

$$y(t) = \Psi(t)x_T, \quad \gamma := \int_{\Theta} \Psi^\top(t)y(t) dt = \Gamma x_T \Rightarrow x_T = \Gamma^{-1}\gamma.$$

Построенный оператор восстановления фазового вектора x_T по измерениям $y(\cdot)$ является линейным интегральным.

Обратно. Если столбцы $\Psi(t)$ линейно зависимы, то найдется $x_T \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ из условия $y(t) = \Psi(t)x_T = 0$ при $t \in \Theta$. Вместе с тем $x_T = 0$ дает $y(t) \equiv 0$. Наблюдаемости (полной) нет. \square

С вычислительной точки зрения целесообразно не обращать матрицу Грама Γ , а решать относительно компонент вектора $X = \Phi^{-1}(T)x_T$ систему линейных уравнений $\tilde{\Gamma}X = \tilde{\gamma}$, где

$$\tilde{\Gamma} = \langle G\Phi, G\Phi \rangle = \int_{\Theta} \Phi^{\top} G^{\top} \Phi G dt, \quad \tilde{\gamma} = \int_{\Theta} \Phi^{\top}(\tau) G^{\top}(\tau) y(\tau) d\tau,$$

численным методом, определяя затем вектор $x_T = \Phi(T)X$.

Двойственность задач наблюдения и управления. Рассматриваем однородную задачу прогнозирования (5.3), (5.4). Оператор восстановления проекции $\varphi(x_T) = h^{\top}x_T = \mathcal{F}(y(\cdot))$ будем искать в форме линейного интегрального функционала:

$$h^{\top}x_T = \langle k, y \rangle = \int_{\Theta} k^{\top}(\tau) y(\tau) d\tau, \quad x_T \in \mathbb{R}^n. \quad (5.5)$$

С учетом $y(t) = \Psi(t)x_T = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(T)x_T$ получаем интегральное уравнение для определения вектор-функции $k(\cdot)$:

$$h = \Phi^{-1\top}(T) \int_{\Theta} \Phi^{\top}(\tau) G^{\top}(\tau) k(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Выбор $k(\cdot)$ ограничим линейной оболочкой $\mathcal{L}(\tilde{\Psi}(\cdot))$ столбцов матрицы $\tilde{\Psi}(t) = G(t)\Phi(t)$, $t \in \Theta$. Полагая $k(t) = G(t)\Phi(t)c$, приходим к линейной системе $\Phi^{\top}(T)h = \tilde{\Gamma}c$ относительно $c \in \mathbb{R}^n$.

Укажем связь с задачей управления. Определим на отрезке времени $[0, T]$ вспомогательную вектор-функцию

$$V(t) = \Phi^{-1\top}(t) \int_0^t \Phi^{\top} G^{\top} k d\tau, \quad k(\tau) = 0, \quad \tau \in (\vartheta, T]. \quad (5.7)$$

Ориентируясь на требуемое соотношение (5.6) фиксируем условия $V(0) = 0$, $V(T) = h$. Для вывода уравнения для $V(t)$ продифференцируем (при $t \neq \vartheta$) (5.7) с учетом $D_t\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A$:

$$\dot{V}(t) = -A^{\top}(t)V(t) + G^{\top}(t)k(t). \quad (5.8)$$

Интерпретируем уравнение (5.8) как линейную систему управления с фазовым вектором $V(t)$. Требуется перевести фазовую точку из нуля в h за время T при ограничении на управление $k(\tau) = 0, \tau > \vartheta$. Если это удастся, то $h^\top x_T = \langle k, y \rangle \forall x_T \in \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система управления (5.8) (пара $(-A^\top, G^\top)$) называется сопряженной к исходной системе наблюдения (A, G) .

В терминах теории управления проекции $h^\top x_T$ состояния $x(T) = x_T$ гарантированно наблюдаемы (прогнозируемы) по информации $y: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$, если вектор h принадлежит множеству достижимости сопряженной системы управления

$$\mathcal{D}_T = \{V(T) | V(0) = 0, k(\cdot) \in C(\Theta), k(\tau) = 0, \tau > \vartheta\}.$$

ТЕОРЕМА 9 (принцип двойственности). Пара (A, G) наблюдаема (прогнозируема) тогда и только тогда, когда сопряженная система (пара $(-A^\top, G^\top)$) управляема, т. е. $\mathcal{D}_T = \mathbb{R}^n$.

Для доказательства достаточно проверить, что критерии наблюдаемости и управляемости (на отрезке Θ) совпадают. Ограничение на $k(\tau)$ влечет $V(t) = \Phi^*(t)\Phi^{*-1}(\vartheta)V(\vartheta)$, где $t > \vartheta$, $\Phi^* = \Phi^{-1\top}$ — фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = -A^\top x$. Следовательно, $\mathcal{D}_T = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathcal{D}_\vartheta := \{V(\vartheta)\} = \mathbb{R}^n$. Критерий полной управляемости на отрезке времени Θ ($\mathcal{D}_\vartheta = \mathbb{R}^n$) — линейная независимость столбцов матрицы $\tilde{\Psi} = G\Phi, t \in \Theta$.

Отметим, что из управляемости на отрезке времени Θ следует управляемость на $[0, T]$. Обратное без указанного ограничения на вектор-функцию $k(\cdot)$ не следует: из линейной независимости столбцов $\tilde{\Psi}(\cdot)$ на $[0, T]$ не следует их независимость на Θ при $\vartheta < T$. Двойственность позволяет применять алгоритмы теории управления в задачах наблюдения и наоборот.

Стационарная задача. Пусть матрицы A, G в (5.4) не зависят от времени и $\Theta = [0, T]$. Сформулируем критерий наблюдаемости (возможности восстановления движения по доступной информации $y: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$), не требующий для своей проверки построения фундаментальной матрицы $\Phi(t) = \exp\{At\}$. Рассмотрим

рим произвольный момент $s \in (0, T)$ и вычислим производные:

$$y(s) = Gx(s), \dot{y}(s) = GAx(s), \dots, y^{(n)}(s) = GA^n x(s), \dots$$

Характеристический полином $\chi(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0$ ($\chi(\lambda) = |\lambda E - A|$) является аннулирующим для матрицы A : $\chi(A) = 0_{n \times n}$. Последовательно все степени A^j , $j \geq n$, выражаются линейными комбинациями матриц E, A, \dots, A^{n-1} и в силу вещественной аналитичности функций $y_i(\cdot)$ (квазиполиномов) имеет место взаимно однозначное соответствие

$$y(\cdot) \leftrightarrow Y(s) = (y^\top(s), \dot{y}^\top(s), \dots, y^{(n-1)\top}(s))^\top \in \mathbb{R}^{nm}.$$

Действительно, $y(\cdot) \leftrightarrow \{y^{(i)}(s), i \geq 0\}$, но все производные $y^{(i)}(s)$ при $i \geq n$ не несут новой информации, являясь линейными комбинациями $y^{(j)}(s) = GA^j x(s)$, $j < n$.

Задача наблюдения сводится к решению системы уравнений

$$K^\top x(s) = Y(s), \quad K = (G^\top, A^\top G^\top, \dots, A^{\top n-1} G^\top).$$

Получаем критерий (полной) наблюдаемости: $\text{rank } K = n$.

Наблюдаемость (прогнозируемость в случае $\vartheta < T$) проекции $\varphi(x) = h^\top x$ фазового вектора в момент времени T возможна лишь когда $h \in \mathcal{L}(K)$, поскольку в силу теоремы единственности для аналитических функций справедливо

$$y|_{\emptyset} \leftrightarrow y|_{\mathbb{R}}, \quad y(t) = Gx(t) = e^{At} x(0), \quad t \in \mathbb{R},$$

и $K^\top x(T) = Y(T) \leftrightarrow y(\cdot)$. В стационарной задаче, когда матрицы A, G постоянны, без ограничения общности можно считать значения $y(t)$ известными для всех $t \in \mathbb{R}$. Всё, что известно ($Y(T) \leftrightarrow y(\cdot)$) об интересующем нас фазовом состоянии — это проекции $x(T)$ на столбцы матрицы K . Краткость рассуждений обусловлена следующим. Критерии наблюдаемости легче выводятся с помощью производных, и формально дело сводится к линейным алгебраическим уравнениям. В условиях зашумленности измерений $y(t)$ использование вычислительно некорректной операции дифференцирования может привести к большим погрешностям и неработоспособности алгоритма восстановления $h^\top x_T, x_T$. Интегральные операции предпочтительнее.

Глава V

Динамические системы: устойчивость и оптимальность

В заключительной главе курса рассмотрим некоторые понятия и методы *качественной теории дифференциальных уравнений*.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Основные понятия и определения. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(X), \quad X = \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Независимую переменную t интерпретируем как время. Фазовым пространством X считаем \mathbb{R}^n (в более общем случае X — дифференцируемое многообразие [2]). Напомним, что решением векторного ОДУ (1.1) является отображение

$$x = \varphi(t), \quad t \mapsto \varphi(t), \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle,$$

а множество

$$\gamma = \{\varphi(t) | t \in \langle t_1, t_2 \rangle\} \subset X$$

называется *фазовой кривой*. Она представляет собой проекцию *интегральной кривой* (графика $\{(t, \varphi(t))\}$ решения) на фазовое пространство параллельно оси t . Нас будут интересовать фазовые кривые, или в механических терминах — траектории движения (орбиты). Параметризация временем на втором плане.

Термин *автономность* означает, что правая часть дифференциального уравнения (в нормальной форме) не зависит от t .

Зависимость от времени, как правило, появляется, когда исследуемую систему нельзя считать изолированной с приемлемой точностью и требуется учесть влияние внешних объектов. Например, притяжение Луны в определенной степени можно учесть, считая ускорение свободного падения известной функцией времени. Формально неавтономную систему можно представить автономной за счет введения дополнительной переменной $x_{n+1} = t$, добавив уравнение $\dot{x}_{n+1} = 1$, но увеличение размерности фазового пространства — слишком дорогая цена.

Поскольку объектом изучения не является собственно параметризация $t \mapsto \varphi(t)$, то без ограничения общности можем считать, что все решения $x = \varphi(t, x_0)$ с начальными условиями $\varphi(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ продолжимы на \mathbb{R} . Приведем необходимую аргументацию. В каждой точке $x \in X = \mathbb{R}^n$ задан вектор фазовой скорости $f(x)$. В наглядном представлении к каждой точке $x \in X$ «прикреплён» экземпляр \mathbb{R}^n (получается касательное пространство $T_x X = \mathbb{R}_x^n$), в котором фиксирован вектор $f(x)$. В изложении не будем придерживаться «строгой» формализации в терминах пар $\{x, f(x)\}$. Итак, в фазовом пространстве X задано поле скоростей f . Геометрически $\dot{\varphi}(t)$ воспринимаем как вектор из \mathbb{R}^n , прикрепленный к точке $\varphi(t) \in X$ (получаем элемент касательного пространства \mathbb{R}_z^n , $z = \varphi(t)$). В силу (1.1) касательный к фазовой кривой вектор $\dot{\varphi}(t)$ совпадает с $f(\varphi(t))$, т. е. траектория касается векторного поля f .

Фазовая кривая характеризуется тем, что если сделать гладкую замену времени $\tau(t)$ (пусть $\dot{\tau} > 0$), то в новой параметризации касательный вектор скорости будет коллинеарен $f(\varphi(t))$, точнее равен $f(\varphi(t))/\dot{\tau}(t)$. «Исправим» теперь векторное поле f так, чтобы направления векторов $f(x)$ не изменились, но длина оказалась равномерно ограниченной. Например, заменим $f \rightarrow \tilde{f} = f/(1 + |f|)$. Условие $|\tilde{f}| < 1$ обеспечивает продолжимость решений уравнения $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ на \mathbb{R} , но при этом фазовые кривые остаются прежними: изменилась лишь параметризация.

Итак, считаем, что (полные) решения исходной системы (1.1) $x = \varphi(t, x_0)$ определены на \mathbb{R} . Начальный момент времени принимаем за начало отсчета, так что $t_0 = 0$, $\varphi(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Основные свойства решений автономных систем

1°. Если $x = \varphi(t)$ — решение, то и вектор-функция $x = \varphi(t+c)$ является решением: $d\varphi(t+c)/dt = d\varphi(t+c)/d(t+c) = f(\varphi(t+c))$.

2°. Фазовые кривые не пересекаются. Докажем утверждение от противного: пусть траектории γ_1, γ_2 , отвечающие решениям $x = \varphi(t), x = \psi(t)$, имеют общую точку $x_* = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Вектор-функция $\psi(t+c)$ (выберем $c = t_2 - t_1$) является решением, причем $\psi(t_1+c) = \varphi(t_1)$. По теореме единственности $\psi(t+c) \equiv \varphi(t), t \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, справедливы равенства $\{\psi(t)\} = \{\psi(t+c)\} = \{\varphi(t)\}, \gamma_1 = \gamma_2$. Фазовое пространство расслаивается на непересекающиеся траектории.

3°. *Положение равновесия* \bar{x} определяется равенством нулю фазовой скорости: $f(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n$. При этом вектор-функция $\varphi(t) = \bar{x}$ — решение, убеждаемся подстановкой. Точка \bar{x} является фазовой траекторией, *точкой покоя, особой точкой* поля f . Траектория, отличная от точки, — гладкая кривая, поскольку её параметризация $x = \varphi(t)$ в силу уравнения (1.1) обладает свойством $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ ($f(\varphi(t)) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$). Итак, траектории делятся на три типа: точки, гладкие кривые без самопересечений и замкнутые гладкие кривые (*циклы*). Циклы соответствуют периодическим решениям [21, 23, 29].

4°. *Групповое свойство* решений:

$$\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)).$$

Докажем первое равенство (второе следует из $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$). Вектор-функции $\varphi(t, \varphi(t_1, x_0))$ и $\varphi(t+t_1, x_0)$ являются решениями: первая в силу обозначений, вторая по свойству 1°. При $t = 0$ имеем совпадающие начальные данные $y_0 = \varphi(t_1, x_0)$. По теореме единственности $\varphi(t, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t+t_1, x_0) \forall t$ (и при $t = t_2$).

Неформальная интерпретация: если двигаться из начальной точки x_0 вдоль траектории в течение времени t_1 , затем отдохнуть и заново стартовать из точки $\varphi(t_1, x_0)$, то за дополнительное время t_2 окажемся на том же месте, как если бы без остановки двигались из x_0 в течение времени $t_1 + t_2$. Ведь за время отдыха поле скоростей автономной системы не изменилось.

Фазовый поток. Это понятие ассоциируется с гидродинамической интерпретацией. Рассмотрим установившееся (стационарное) течение жидкости. Частица в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет скорость $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$. Поле скоростей не зависит от времени, другая частица в другой момент времени в этой же точке будет иметь ту же скорость. Фазовые траектории — это *линии тока*. Возьмем любую точку $x \in X$ и сдвинемся вдоль линии тока за время t . Получим отображение

$$g^t: X \rightarrow X, \quad g^t x = \varphi(t, x).$$

Если следить за областью $D \subset X$ ($x \in D$), то она движется по закону $g^t D = \{g^t x | x \in D\}$, в общем случае деформируясь и изменяя объем. Множество отображений $\{g^t\}$ называется *фазовым потоком*. Такая удобная терминология используется и в том случае, когда речь идет вовсе не о течении жидкости.

Более того, можно абстрагироваться от порождающей поток $\{g^t\}$ системы дифференциальных уравнений и изучать *однопараметрические группы преобразований* фазового пространства X . Действительно, в силу группового свойства 4°

$$g^{t_1+t_2} = g^{t_1} \circ g^{t_2} = g^{t_2} \circ g^{t_1}, \quad g^t \circ g^{-t} = \text{id},$$

где id является тождественным преобразованием (единицей): $\text{id} x = x \forall x \in X$. Отображение g^t является преобразованием X :

$$g^t x \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n, \quad g^t(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}.$$

Вместо \mathbb{R}^n можно рассматривать абстрактное метрическое пространство X и изучать *динамическую систему* $\{g^t\}$, исходя из условия непрерывности $g^t x$ по совокупности переменных и аксиом группы. Развитие темы изложено в книгах [2, 9–11, 18].

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Качественная структура разбиения фазового пространства динамической системы на траектории движения называется *фазовым портретом* (ограничимся таким общим определением).

Для определенности будем иметь в виду уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(X), \quad X = \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

(полные) решения которого $x = \varphi(t, x_0)$ определены при всех значениях $t \in \mathbb{R}$, хотя для дальнейшего достаточно лишь следующих аксиом *динамической системы*:

- 1) $\varphi(t, x_0): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $\varphi(t, x_0)$ непрерывна по совокупности переменных;
- 3) $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0) \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Аксиома 3) влечет существование у каждого отображения $\varphi(t, \cdot)$ обратного $\varphi(-t, \cdot)$. Семейство $\varphi(t, \cdot)$ образует однопараметрическую группу преобразований фазового пространства $X = \mathbb{R}^n$.

Наряду с движениями $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ динамической системы $\varphi(t, x_0)$, траекториями (орбитами) $\gamma = \{\varphi(t, x_0)\}$ рассматривают и полутраектории (положительные и отрицательные):

$$\gamma^+ = \gamma_{x_0}^+ = \{\varphi(t, x_0), t \geq 0\}, \quad \gamma^- = \gamma_{x_0}^- = \{\varphi(t, x_0), t \leq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе $\varphi(t, x_0)$* , если

$$x_0 \in A \Rightarrow \varphi(t, x_0) \in A \forall t \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 1 (об интегральной непрерывности). *Для любых фиксированных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(x_0, \varepsilon, T)$, что выполняется следствие*

$$|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| < \varepsilon \forall t \in [-T, T].$$

Геометрический смысл состоит в том, что движения, начинающиеся в достаточно близких точках, остаются сколь угодно близкими на любом заранее фиксированном отрезке времени. Вместо евклидовой нормы $|\cdot|$ можно взять любую другую $\|\cdot\|$.

Доказательство. Фиксируем x_0 , $T > 0$. Пусть теорема неверна: $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$ и последовательности $x_k \in \mathbb{R}^n$, $t_k \in [-T, T]$, для которых

$$|x_k - x_0| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \quad |\varphi(t_k, x_k) - \varphi(t_k, x_0)| > \tilde{\varepsilon}.$$

Выберем сходящуюся подпоследовательность $t_{k_j} \rightarrow t_0 \in [-T, T]$, $j \rightarrow +\infty$. С одной стороны, $|\varphi(t_{k_j}, x_{k_j}) - \varphi(t_{k_j}, x_0)| > \tilde{\varepsilon}$, а с другой — в силу непрерывности $\varphi(t, x)$ по совокупности переменных имеет место сходимости к одному и тому же пределу:

$$\varphi(t_{k_j}, x_0) \rightarrow \varphi(t_0, x_0), \quad \varphi(t_{k_j}, x_{k_j}) \rightarrow \varphi(t_0, x_0), \quad j \rightarrow +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. \square

Докажем ряд утверждений качественного характера.

1°. *Замыкание \bar{A} инвариантного множества инвариантно.*

Если $x_0 \in A$, то $\varphi(t, x_0) \in A \subseteq \bar{A}$, так что осталось рассмотреть случай $x_0 \in \bar{A} \setminus A$. По определению замыкания \bar{A} существует последовательность $x_k \rightarrow x_0$, $x_k \in A$. Включение $x_k \in A$ влечет $\varphi(t, x_k) \in A$ и по непрерывности $\varphi(t, x_k) \rightarrow \varphi(t, x_0)$, откуда по определению замыкания $\varphi(t, x_0) \in \bar{A}$. При этом $\varphi(t, x_0) \notin A$, иначе в силу инвариантности A было бы $x_0 = \varphi(-t, \varphi(t, x_0)) \in A$.

Таким образом, не только замыкание \bar{A} , но и $\bar{A} \setminus A$ инвариантно (считаем пустое множество инвариантным по определению). Множество граничных точек $\bar{A} \setminus A$ (в случае $\neq \emptyset$) является объединением траекторий динамической системы.

2°. *Множество всех точек покоя инвариантно и замкнуто.*

Точки покоя \bar{x} определяются условием $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{x} \forall t \in \mathbb{R}$. Пусть $A = \{\bar{x}\}$ — объединение всех точек покоя. По определению $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{x} \in A$, т. е. A инвариантно. Осталось доказать $\bar{A} = A$. Если $x_0 \in \bar{A}$, то существует последовательность $x_k \in A$:

$$|x_k - x_0| \rightarrow 0, \quad |\varphi(t, x_k) - \varphi(t, x_0)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

В силу $\varphi(t, x_k) = x_k$ ($x_k \in A = \{\bar{x}\}$) получаем следствие

$$|x_k - \varphi(t, x_0)| \rightarrow 0 \Rightarrow |x_0 - \varphi(t, x_0)| = 0, \quad x_0 \in A.$$

Включение $\bar{A} \subseteq A$ означает $\bar{A} = A$, т. е. замкнутость A .

3°. Движение, отличное от точек покоя, не может при-
мыкать к точке покоя за конечное время.

Пусть \bar{x} — точка покоя и для некоторых t_0, x_0 выполнено
равенство $\varphi(t_0, x_0) = \bar{x}$. Тогда $x_0 = \varphi(-t_0, \bar{x}) = \bar{x}$ и фазовая
траектория $\{\varphi(t, x_0)\}$ является точкой покоя \bar{x} .

4°. Если $\varphi(t, x_0) \rightarrow \tilde{x}$ при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$, то $\tilde{x} \in \{\bar{x}\}$.

С одной стороны, выполнено $\varphi(t_j + \tau, x_0) \rightarrow \tilde{x}$ при $t_j \rightarrow \infty$
(поскольку $t_j + \tau \rightarrow \infty$), а с другой (по групповому свойству) —

$$\varphi(t_j + \tau, x_0) = \varphi(\tau, \varphi(t_j, x_0)) \rightarrow \varphi(\tau, \tilde{x}).$$

Вследствие единственности предела $\varphi(\tau, \tilde{x}) = \tilde{x}$. Произвольность
числа $\tau \in \mathbb{R}$ означает, что $\tilde{x} = \bar{x}$ — точка покоя.

Продолжим определения. Точка покоя \bar{x} называется *изолиро-
ванной*, если существует её окрестность, не содержащая других
точек покоя. Под окрестностью точки понимаем произвольное
множество, для которого эта точка является внутренней. Точка
покоя \bar{x} называется *устойчивой по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon \forall t \geq 0.$$

Это означает непрерывность по начальным данным, равномер-
ную по $t \in [0, +\infty)$. Точка покоя \bar{x} *асимптотически устойчива
по Ляпунову*, если имеет место устойчивость и дополнительно

$$\exists \sigma > 0: |x_0 - \bar{x}| < \sigma \Rightarrow |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$$

Напомним, что в данном изложении продолжимость движений
на всю числовую ось времени \mathbb{R} постулируется (что не ограни-
чивает общность при изучении фазовых траекторий).

Точка \tilde{x} называется *ω -предельной* для движения $\varphi(t, x_0)$ (или
траектории $\gamma = \gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0)\}$), если существует последова-
тельность $t_k \rightarrow +\infty$ из условия $\varphi(t_k, x_0) \rightarrow \tilde{x}$, $k \rightarrow +\infty$. Если в
определении заменить $t_k \rightarrow +\infty$ на $t_k \rightarrow -\infty$, то \tilde{x} называется
 α -предельной точкой. Далее для определенности рассматриваем
 ω -предельные точки, множество которых обозначим $\Omega = \Omega_{x_0}$.

Для точки покоя $\Omega_{\bar{x}} = \bar{x}$. Если $\varphi(t, x_0)$ периодическое, т. е.

$$\varphi(t, x_0) \neq x_0 \text{ и } \exists T > 0: \varphi(t + T, x_0) = \varphi(t, x_0) \forall t \in \mathbb{R},$$

то $\Omega_z = \gamma \forall z \in \gamma = \{\varphi(t, x_0)\}$. Замкнутая траектория, соответствующая периодическому движению, называется *устойчивым предельным циклом*, если $\gamma = \Omega_{x_0}$ для всех x_0 из некоторой ε -окрестности γ : $x_0 \in U_\varepsilon(\gamma) = \{x \mid \inf |x - z| < \varepsilon, z \in \gamma\}$. С прикладной точки зрения реальны те периодические движения, которым соответствуют устойчивые предельные циклы.

5°. Множество Ω ($\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$) инвариантно и замкнуто.

Фиксируем произвольный вектор начальных данных x_0 , и пусть $\Omega = \Omega_{x_0} \neq \emptyset$ (пустое множество по определению инвариантно и замкнуто). Докажем инвариантность множества Ω . Пусть $\tilde{x} \in \Omega$: $\exists t_k \rightarrow +\infty, x_k = \varphi(t_k, x_0) \rightarrow \tilde{x}$ ($k \rightarrow +\infty$). По непрерывности $\varphi(t, x_k) \rightarrow \varphi(t, \tilde{x})$ и по групповому свойству выполняется $\varphi(t, x_k) = \varphi(t + t_k, x_0)$. Из $t + t_k \rightarrow +\infty$ ($\forall t, k \rightarrow +\infty$) заключаем, что имеет место включение $\varphi(t, \tilde{x}) \in \Omega$.

Докажем замкнутость Ω . Пусть z — предельная точка Ω : $\exists \tilde{x}_k \in \Omega, \tilde{x}_k \rightarrow z$ ($k \rightarrow +\infty$). По неравенству треугольника

$$|\varphi(t, x_0) - z| \leq |z - \tilde{x}_k| + |\varphi(t, x_0) - \tilde{x}_k|.$$

По любому фиксированному $\varepsilon > 0$ можно указать номер k_ε из условия $|z - \tilde{x}_k| < \varepsilon/2$ при $k \geq k_\varepsilon$. Так как $\tilde{x}_k \in \Omega$, то $\exists \tau = \tau(k, \varepsilon)$: $|\varphi(\tau, x_0) - \tilde{x}_k| < \varepsilon/2$. Выбирая последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$, можем построить последовательность τ_i , для которой $\varphi(\tau_i, x_0) \rightarrow z$ ($i \rightarrow +\infty$), что и означает $z \in \Omega, \Omega = \bar{\Omega}$.

Определение устойчивости по Ляпунову можно перенести на произвольные инвариантные множества A : A устойчиво, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x_0 \in U_\delta(A) \Rightarrow \varphi(t, x_0) \in U_\varepsilon(A), t \geq 0.$$

Здесь $U_r(A)$ обозначает r -окрестность множества A :

$$U_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, A) < r\}, \quad \rho(x, A) = \inf |x - y|, y \in A.$$

Асимптотическая устойчивость означает, что помимо устойчивости выполняется $\rho(\varphi(t, x_0), A) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) для x_0 , достаточно близких к множеству A . С точки зрения теории колебаний основной интерес представляют компактные (в \mathbb{R}^n ограниченные и замкнутые) инвариантные множества A и множества

притяжения $B = \{x_0 \mid \rho(\varphi(t, x_0), A) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\}$. Эти определения содержат в себе понятия *орбитальной устойчивости* и *асимптотической орбитальной устойчивости* ($A = \gamma$).

Продолжим обзор базовых определений. Движение $\varphi(t, x_0)$ и траектория $\gamma = \{\varphi(t, x_0)\}$ называются *положительно устойчивыми по Лагранжу*, если $\gamma_{x_0}^+ \in K$, где K — некоторый компакт в \mathbb{R}^n . Аналогично определяются *отрицательно устойчивые* движения и траектории. Если вся траектория не выходит за пределы компакта, то приходим к понятию *устойчивости по Лагранжу*. Если точка x_0 является одновременно ω - и α -пределной для движения $\varphi(t, x_0)$, то она называется *устойчивой по Пуассону*. Такой тип устойчивости означает, что для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ найдутся $t_1 > T$ и $t_2 < -T$ из условия $|\varphi(t_i, x_0) - x_0| < \varepsilon$. Точка x_0 называется *блуждающей*, если существует ε -окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ со следующим свойством: можно указать $T > 0$, для которого $\varphi(t, y_0) \notin U_\varepsilon(x_0)$ при всех $y_0 \in U_\varepsilon(x_0)$ и $t > T$. Иными словами, траектории движений, начинающихся в окрестности x_0 , не возвращаются в неё спустя время T . Движение $\varphi(t, x_0)$ *рекуррентно*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует $T_\varepsilon > 0$, для которого любая дуга траектории временной длины T_ε аппроксимирует с точностью ε всю траекторию $\gamma = \{\varphi(t, x_0)\}$. Эквивалентная формулировка: $\forall \varepsilon > 0$ можно указать число $L_\varepsilon > 0$, для которого в любом интервале $(t_0, t_0 + L_\varepsilon)$ по каждому фиксированному значению t найдется число τ из условия $|\varphi(t + \tau, x_0) - \varphi(t, x_0)| < \varepsilon$. Рекуррентное движение называется *почти периодическим*, если $\forall \varepsilon > 0$ почти периоды τ можно выбрать независимо от t .

Для $n = 2$ теория динамических систем (на плоскости) имеет классическую составляющую: *теория Пуанкаре–Бендиксона*. В основу положено свойство замкнутой линии делить фазовое пространство на две части. При $n > 2$ ситуация значительно сложнее, возможно возникновение *странных аттракторов* и *детерминированного хаоса*. Теория колебаний и общих динамических систем обширна, основы изложены в [2, 9, 10, 14, 18, 31].

3. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Выпрямление векторного поля. В области $G \subseteq \mathbb{R}^n$ задания уравнения $\dot{x} = f(x)$ фиксируем неособую точку $\tilde{x}: f(\tilde{x}) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. В силу предполагаемой гладкости ($f \in C^1(G)$)

$$\dot{x} = f(x) \approx f(\tilde{x}), \quad x \in U_\varepsilon(\tilde{x}), \quad \varepsilon > 0 \quad (\text{с погрешностью } O(|x - \tilde{x}|)).$$

Векторное поле фазовой скорости в малой ε -окрестности \tilde{x} имеет практически неизменные длину и направление. Следовательно, фазовые кривые в U_ε почти параллельны. *Утверждение* [2, 3, 29]: можно определить точку \tilde{y} (в пространстве \mathbb{R}^n с декартовыми координатами y_1, \dots, y_n), прямоугольную окрестность $V = \{y \mid |y_i - \tilde{y}_i| < \alpha_i\}$ и диффеоморфизм $g: V \rightarrow U = g(V) \subseteq G$, такие, что: $\tilde{x} = g(\tilde{y})$, и в новых переменных исходная система дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ примет вид

$$\dot{y}_1 = 0, \dots, \dot{y}_{n-1} = 0, \dot{y}_n = 1 \quad (\dot{y} = e^n = (0, \dots, 0, 1)^\top).$$

Уточним терминологию. Под диффеоморфизмом понимается отображение, в данном случае g , которое взаимно однозначно (биективно) и класса C^1 вместе со своим обратным отображением $g^{-1}: U \rightarrow V$. При этом $U = g(V)$ является областью, окрестностью точки \tilde{x} . Замена переменных $x = g(y)$ (указанного класса) приводит к преобразованию исходного уравнения $\dot{x} = f(x)$:

$$\dot{x} = g'_y \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \tilde{f}(y) \equiv (g'_y)^{-1} f(g(y)),$$

где g'_y — матрица Якоби со строками $(\partial g_i / \partial y_1, \dots, \partial g_i / \partial y_n)$. Утверждается, что $\tilde{f}(y) = e^n$ в прямоугольнике V , в пределах которого дифференциальное уравнение легко интегрируется:

$$y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = t + c_n.$$

Фазовые кривые — прямые, параллельные оси y_n (рис. 3.1).

Приведем схему доказательства в геометрических терминах. Без ограничения общности считаем $f_n(\tilde{x}) \neq 0$, иначе перенумеруем фазовые переменные. Рассмотрим гиперплоскость

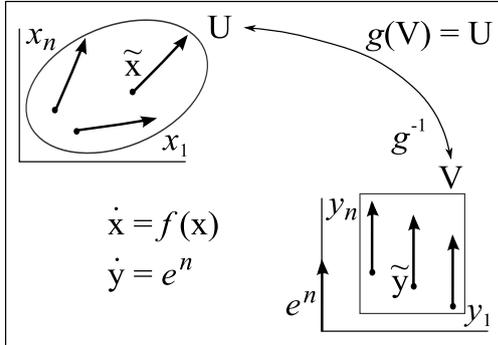


Рис. 3.1. Выпрямление поля f

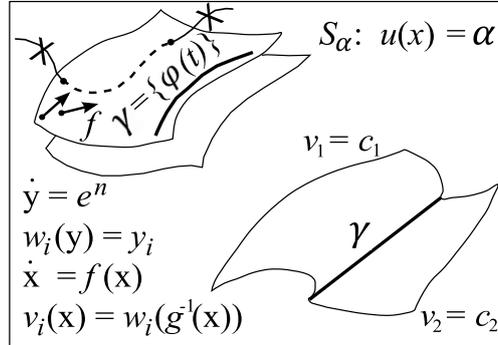


Рис. 3.2. Первые интегралы

$\{(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{x}_n)^\top \mid y_j \in \mathbb{R}\}$, зафиксировав n -ю координату. Добавим $y_n = t$ и определим отображение g следующим образом:

$$x = g(y) = \varphi(t, x_0), \quad x_0 = (y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{x}_n)^\top.$$

При этом $\tilde{x} = g(\tilde{y})$, $\tilde{y} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, 0)^\top$. Содержательный смысл построений: берем начальную точку x_0 на гиперплоскости (принимаем $t_0 = 0$) и выпускаем из нее траекторию. В момент времени t попадаем в некоторую точку x , которую и считаем образом y . Поскольку x_0 имеет смысл начальных данных, то вдоль траектории числа y_1, \dots, y_{n-1} не изменяются. С учетом $y_n = t$ ($|y_n| < \alpha_n$) получаем в новых координатах (локально) параметрическое представление траектории движения:

$$y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = t, \quad |y_i - \tilde{x}_i| < \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

Остается доказать, что отображение $x = g(y)$ действительно определяет гладкую невырожденную замену переменных в окрестности \tilde{x} . Для этого используются теорема о гладкой зависимости решений от параметров (в главе II приведена лишь формулировка) и теорема об обратном отображении (матрица Якоби $g'_y(\tilde{y})$ невырождена). В общем случае результат носит теоретический характер, поскольку поиск диффеоморфизма g фактически эквивалентен интегрированию исходной системы.

Изменение фазового объема. Фиксируем ограниченную область $D \subset \bar{D} \subset G$ с гладкой границей S , воспринимая её как множество начальных данных $\{x_0\}$. В условиях продолжимости решений можем следить за изменением D под действием фазового потока g^t : $D^t = g^t D = \varphi(t, D)$. Как изменяется объем области D^t ? В окрестности неособой точки \tilde{x} имеем $f(x) \approx f(\tilde{x})$, поле выпрямляется диффеоморфизмом, и в первом приближении локально можно считать изменение фазового объема малым. Обозначим через V^t объем D^t и попытаемся вычислить производную dV^t/dt при $t = 0$ (начальную скорость изменения объема области D), ограничившись эвристическим уровнем рассуждений. Фиксируем элементарную площадку dS поверхности $S = \partial D$. Элементарное изменение объема по вектору фазовой скорости определяется как $dV = \langle f(x), n \rangle dS dt$, где n — единичная внешняя нормаль к поверхности, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Величина dV с точностью до знака есть объем цилиндра с основанием dS и образующей длины $|f(x)| dt$. Образующая определяется вектором скорости фазового потока $f(x)$ в точке $x \in S$. Величина $\langle f(x), n(x) \rangle$ является нормальной составляющей вектора скорости. Суммируя элементарные изменения объема, после деления на dt и предельного перехода получаем

$$\left. \frac{dV^t}{dt} \right|_{t=0} = \int_S \langle f(x), n(x) \rangle dS = \int_D \operatorname{div} f(x) dx.$$

Второе равенство — формула Гаусса–Остроградского. Таким образом, изменение фазового объема определяется дивергенцией векторного поля фазовой скорости $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Tr} f'_x = \sum \partial f_i / \partial x_i$. В линейном случае $f(x) = Ax$ имеем $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Tr} A = \sum a_{ii}$. Когда $\operatorname{div} f(x) = 0$, фазовый поток сохраняет объем. Если интерпретировать $f(x)$ как поле скоростей частиц жидкости в установившемся режиме, то $\operatorname{div} f(x) = 0$ означает несжимаемость жидкости. Строгое изложение вопроса см., например, в [29].

Первые интегралы. Рассмотрим в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$ гладкое (класса C^1) векторное поле и соответствующее ОДУ:

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(G), \quad f(x) \in T_x G = \mathbb{R}^n.$$

При необходимости можно ослабить требование к вектор-функции f до $f \in \text{locLip}(G)$, лишь бы для любых начальных данных (t_0, x_0) имели место существование и единственность решения задачи Коши $x = \varphi(t, x_0)$, $\varphi(t_0, x_0) = x_0$. Ограничимся стационарным случаем, полагая $t_0 = 0$. В теоретических рассуждениях обычно по умолчанию решения подразумеваются полными, т. е. заданными на максимальном интервале существования. В общем случае решение — это пара $\{\varphi, I\}$: вектор-функция $x = \varphi(t)$ с указанием интервала $I = (t_1, t_2)$, на котором $\dot{\varphi}(t) \equiv f(\varphi(t))$. С оговоркой об односторонних производных можно рассматривать и промежутки времени $\langle t_1, t_2 \rangle$.

В приложениях важную роль играют законы сохранения. Формально речь идет о функциях, сохраняющих постоянное значение вдоль каждого решения (на соответствующей фазовой кривой). Такие функции называются *интегралами*. Употребляется также термин *первый интеграл*, поскольку в общей теории встречаются и так называемые промежуточные интегралы (см. [16], с. 159). Название сложилось исторически — в простейших случаях используется операция интегрирования.

Итак, функция $u(x)$ является интегралом в области $D \subseteq G$, если: $\varphi(t) \in D, t \in I \Rightarrow u(\varphi(t)) = c = \text{const}$. Константа c — общая для $t \in I$, но, вообще говоря, её значение зависит от фазовой траектории. Множество $S_\alpha = \{x \in G \mid u(x) = \alpha\}$ называется множеством (поверхностью) уровня функции $u(x)$. Каждая фазовая кривая, лежащая в области D , принадлежит только одному S_α (рис. 3.2). Помимо функции нужно указывать и область, в которой она рассматривается как интеграл. По умолчанию обычно подразумевается $D = G$. Кроме того, интерес представляют невырожденные интегралы (не константы). Для содержательности теории добавляют требование, чтобы $u(x)$ не обращалась в константу ни в какой подобласти области D . Чтобы иметь возможность использовать аппарат дифференциального исчисления, предполагают $u \in C^1(D)$. В дальнейшем подразумеваем выполненными эти естественные ограничения.

Для аналитического критерия постоянства $u(x)$ на фазовых траекториях понадобится понятие *производной в силу системы*

или производной по направлению векторного поля.

Рассмотрим гладкую функцию $v(x)$ (класса $C^1(D)$) и решение $x = \varphi(t, x_0)$ с начальными данными $\varphi(0, x_0) = x_0 \in D$. На достаточно малом интервале $|t| < \varepsilon$ соответствующая фазовая траектория $\gamma = \{\varphi(t, x_0)\}$ находится в пределах области определения функции $v(x)$: $\gamma \subset D$. Вдоль решения получаем функцию $w(t) = v(\varphi(t, x_0))$, $|t| < \varepsilon$. Продифференцируем её в нуле:

$$\dot{w}(0) = v'_x(x_0) \cdot f(x_0) = \langle \text{grad } v(x_0), f(x_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) f_i(x_0),$$

$$v'_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right), \quad \text{grad } v = (v'_x)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Число $\dot{w}(0)$ обозначаем $\dot{v}(x_0)$. Поскольку вектор x_0 выбирался произвольным из области D , то получаем функцию $\dot{v}: D \rightarrow \mathbb{R}$. Эта функция и называется производной v в силу системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ или производной v по направлению векторного поля f . Используется также обозначение $L_f v$ (в честь норвежского математика Софуса Ли).

В чем содержательный смысл такого определения? Вспомним понятие производной v по направлению $h \in \mathbb{R}^n$ ($|h| = 1$):

$$\frac{\partial v}{\partial h}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(x + th) = v'_x(x) \cdot h = \langle \text{grad } v(x), h \rangle.$$

От нормировки $|h| = 1$ можно отказаться: нас интересует скорость изменения функции при движении вдоль вектора h . Введенное понятие производной $\dot{v}(x) = L_f v(x)$ является естественным обобщением: двигаемся из точки x вдоль фазовой кривой и вычисляем скорость изменения функции v : $x \in D \Rightarrow$

$$\dot{v}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(\varphi(t, x)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(x + tf(x)) = \langle \text{grad } v(x), f(x) \rangle.$$

ТЕОРЕМА 2. Функция $v \in C^1(D)$ является (первым) интегралом в области D тогда и только тогда, когда

$$\dot{v}(x) = \langle \text{grad } v(x), f(x) \rangle = 0, \quad x \in D.$$

Доказательство. Пусть v — интеграл класса C^1 . Подставляя в качестве аргумента решение $x = \varphi(t, x)$ ($x \in D$, $|t| < \varepsilon$), получаем $v(\varphi(t, x)) = \text{const}$. Вычисляя производную по t в начальный момент времени $t = 0$, получаем $\langle \text{grad } v, f \rangle = 0$.

Обратно. Берем любое решение $x = \varphi(t, x_0)$ ($t \in I = (t_1, t_2)$) с фазовой кривой $\gamma = \{\varphi(t)\} \subset D$. Тогда на интервале времени I $\langle \text{grad } v(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle = 0$. Между тем левая часть равна производной функции $v(\varphi(t))$ по t . Значит, $v(\varphi(t)) = \text{const}$, $t \in I$. \square

Итак, гладкие интегралы описываются как решения уравнения в частных производных. Это позволяет при изучении линейных уравнений в частных производных первого порядка оперировать интегралами соответствующей системы ОДУ.

Базис первых интегралов. Сохраняется ли свойство функции быть интегралом при замене координат? Рассмотрим диффеоморфизм $x = g(y)$ ($y \in W$, $g(W) = D$) и перейдем к новым (криволинейным) координатам: $w(y) = v(g(y))$,

$$\dot{x} = g'_y \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \tilde{f}(y) \equiv (g'_y)^{-1} f(g(y)).$$

Фиксируем $y_0 \in W$ и вычислим производную $\dot{w}(y_0)$:

$$\begin{aligned} \dot{w}(y_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 w(\tilde{\varphi}(t, y_0)) = w'_y(y_0) \cdot \tilde{f}(y_0) = \\ &= v'_x(x_0) \cdot g'_y(y_0) (g'_y(y_0))^{-1} f(x_0) = v'_x(x_0) \cdot f(x_0) = \dot{v}(x_0), \end{aligned}$$

$x_0 = g(y_0)$. Таким образом, если $v(x)$ — интеграл класса C^1 в области D системы $\dot{x} = f(x)$, то после гладкой замены переменных получаем интеграл $w(y) = v(g(y))$ в области $W = g^{-1}(D)$ системы $\dot{y} = \tilde{f}(y)$. Это свойство называется инвариантностью первого интеграла относительно выбора системы координат.

Фиксируем неособую точку \tilde{x} ($f(\tilde{x}) \neq 0$) и прямоугольную окрестность V точки $\tilde{y} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, 0)^\top$, указанную выше. В области V имеем $\dot{y} = e^n = (0, \dots, 0, 1)^\top$. Интегралы $w_1(y) = y_1, \dots, w_{n-1}(y) = y_{n-1}$ являются невырожденными в V . Поскольку в переменных y для любого гладкого интеграла $w: V \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется $\langle \text{grad } w(y), \tilde{f}(y) \rangle = \partial w / \partial y_n = 0$, то

функция $w(y)$ не зависит от y_n : $w(y) = F(y_1, \dots, y_{n-1})$,

$$F \in C^1(\Pi), \quad \Pi = \{(y_1, \dots, y_{n-1})^\top \mid |y_i - \tilde{x}_i| < \alpha_i\}.$$

Итак, множество всех гладких интегралов в области V описывается функциональной оболочкой ($\{F\} = C^1(\Pi)$) фиксированных интегралов w_1, \dots, w_{n-1} , которые независимы в смысле

$$\text{rank} \frac{\partial(w_1, \dots, w_{n-1})}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = n-1, \quad y \in V.$$

В «старых» переменных результат переформулируется для интегралов $v_1(x) = w_1(g^{-1}(x)), \dots, v_{n-1}(x) = w_{n-1}(g^{-1}(x))$, $x \in U$.

Комментарии. Наличие нескольких независимых первых интегралов позволяет понижать размерность задачи анализа фазовых кривых (в общем случае локально), поскольку траектории движения находятся на пересечении поверхностей уровня интегралов (см. рис. 3.2). В окрестности особых точек ($f(\bar{x}) = 0$) ситуация сложнее. Длина $|f(x)|$ стремится к нулю при $x \rightarrow \bar{x}$, но направление вектора $f(x)$ в окрестности положения равновесия \bar{x} может меняться сложным образом. Нетривиальных интегралов может и не быть в окрестности \bar{x} . Например, для простейшей линейной системы на плоскости $\dot{x} = x, \dot{y} = y$ непрерывный в окрестности нуля интеграл $v(x, y)$ есть постоянная. Действительно, фазовые траектории этой системы — лучи $y = Cx$ ($x = c_1 e^t, y = c_2 e^t$), выходящие из начала координат. По непрерывности $v(x, y) = v(0, 0)$ на каждом луче, т. е. $v = \text{const}$.

Нетрудно проверить, что линейная система ОДУ

$$\dot{x} = -2bx - 2cy - q_2, \quad \dot{y} = 2ax + 2by + q_1$$

имеет интеграл $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + q_1x + q_2y$. Следовательно, фазовые кривые являются кривыми второго порядка, теория которых изучалась в курсе аналитической геометрии.

Хрестоматийный пример интеграла — механическая энергия точки, движущейся по прямой в потенциальном силовом поле:

$$m\ddot{x} = F(x) = -U'(x), \quad m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0, \quad v(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

На решениях $x = \varphi(t)$ имеем $E = \text{const}$. Тот факт, что фазовая кривая $\{(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))\}$ находится на поверхности уровня функции v , позволяет в широком классе потенциалов $U(x)$ строить фазовый портрет (по крайней мере на качественном уровне).

В нестационарном случае, когда $\dot{x} = f(t, x)$ и $v = v(t, x)$, производная $\dot{v}(t, x) = L_f v(t, x)$ определяется как

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} v(\tau, \varphi(\tau)) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \cdot f(t, x) \quad (\varphi(t) = x).$$

Гладкие интегралы описываются как решения линейного уравнения в частных производных $L_f v = 0$, $(t, x) \in D \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Добавляя фазовую переменную $x_{n+1} = t$, формально приходим к автономной системе, причем в силу $\dot{x}_{n+1} = 1$ особых точек нет. Правда, отметим, что в приложениях нестационарные интегралы представляют меньший интерес, чем стационарные.

4. Устойчивость по Ляпунову

Решений, определяемых различными начальными данными, бесконечно много. Опыт показывает, что не все они «равноценны» при изучении динамической системы на неопределенно большом отрезке времени (бесконечном в рамках математической модели). Реализуются лишь устойчивые решения, соответствующие при адекватном моделировании устойчивым режимам функционирования объекта. В интуитивном смысле понятие устойчивости не вызывает затруднений в конкретных практических задачах. Разнообразие этих задач приводит к различным математическим определениям устойчивости. В данном параграфе приведем основные понятия теории устойчивости по Ляпунову (*Общая задача об устойчивости движения*, 1892).

Основные определения. Ограничимся анализом устойчивости положений равновесия автономных систем дифференциальных уравнений. Придерживаемся механической терминологии.

В области $G \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим векторное ОДУ

$$\dot{x} = f(x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(G).$$

Решения с начальными данными (t_0, x_0) , как обычно, обозначаем $x = \varphi(t, x_0)$. В силу автономности начальный момент времени считаем началом отсчета: $t_0 = 0$. Нас интересуют окрестности положений равновесия \bar{x} , определяемых условием $f(\bar{x}) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положение равновесия $\bar{x} \in G$ называется устойчивым по Ляпунову, если выполнены следующие условия:

- 1) существует $\Delta > 0$, для которого решения $x = \varphi(t, x_0)$ продолжимы на промежуток времени $[0, +\infty)$ при $|x_0 - \bar{x}| < \Delta$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta < \Delta$), что

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Это означает, что если начальная точка находится достаточно близко к положению равновесия, то положительная полутраектория движения останется вблизи этой точки покоя. В порядке аналогии вспомним определение непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Так что устойчивость по Ляпунову — это непрерывность решения $x = \varphi(t, x_0)$ по начальным данным x_0 в точке \bar{x} , равномерная по $t \in [0, +\infty)$. Асимптотическая устойчивость означает, что помимо устойчивости имеет место притяжение в смысле

$$\exists \sigma > 0 \ (\sigma < \Delta), \quad |x_0 - \bar{x}| < \sigma \Rightarrow |\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Предостережение: притяжение не влечет устойчивость. Введенные понятия вполне прозрачны, достаточно представить себе движение маятника или шарика в ямке. Асимптотической устойчивости соответствует учет трения, сопротивления среды.

Асимптотическая устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейное уравнение $\dot{x} = Ax$ с постоянной вещественной матрицей A . Тривиальная точка покоя $\bar{x} = 0$ не обязательно единственна. Если $A\bar{x} = 0$, $\bar{x} \neq 0$, то заменой $y = x - \bar{x}$ приходим к $\dot{y} = Ay$, $\bar{y} = 0$. Так что без ограничения общности можно изучать лишь устойчивость нулевого положения равновесия. Переход к новым переменным — отклонениям от изучаемого движения, является общим приемом, поскольку для нулевого решения технические выкладки менее громоздки.

Воспользуемся общим решением:

$$x(t) = e^{At}x_0 \Rightarrow \|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \cdot \|x_0\|.$$

Здесь и далее удобно использовать норму $\|x\| = \max |x_i|$.

Соответствующая матричная норма определяется формулой

$$B = B_{n \times n} = \{b_{ij}\} \Rightarrow \|B\| = \max_j \sum_{k=1}^n |b_{jk}|.$$

В комплексной записи элементами матричной экспоненты e^{At} являются квазиполиномы, показатели экспонент — собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ($s \leq n$) матрицы A . Считаем $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различными, в общем случае $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию

$$\gamma(t) = t^k e^{\lambda t} = t^k e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad \lambda = \alpha + i\beta.$$

Если взять вещественное число $\mu > \alpha = \operatorname{Re} \lambda$, то у функции $\gamma(t)e^{-\mu t}$ показатель вещественной экспоненты $\alpha - \mu$ будет отрицательным, откуда следует ограниченность $|\gamma(t)e^{-\mu t}| \leq C$ в силу $t^k e^{(\alpha-\mu)t} \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Итак, справедлива оценка $|\gamma(t)| \leq C e^{\mu t}$.

Возвращаясь к линейной системе ОДУ, получаем оценку

$$\|\varphi(t, x_0)\| \leq M e^{\mu t} \|x_0\|, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad M = \text{const} > 0, \quad \mu > \operatorname{Re} \lambda_j.$$

Поскольку $|x| \leq \sqrt{n} \|x\|$, $\|x\| \leq |x|$, то можно заменить кубическую норму $\|\cdot\|$ на евклидову $|\cdot|$ (и наоборот в определении устойчивости). Коррекция константы M не принципиальна.

Если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ($1 \leq j \leq s$), то можно взять $\mu < 0$ и формально заменить в оценке величины φ , x_0 на $\varphi - \bar{x}$, $x_0 - \bar{x}$ ($\bar{x} = 0$).

Тогда по определению получаем, что точка покоя $\bar{x} = 0$ (единственная в силу $\det A = \prod_1^n \lambda_j \neq 0$) асимптотически устойчива.

Наличие $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ влечет неустойчивость, а при $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ ($\exists =$) исследование устойчивости требует более детального изучения матрицы A (её *жордановой формы*). В кратком курсе не будем на этом останавливаться. Наибольший практический интерес имеет именно асимптотическая устойчивость (возмущенное решение «возвращается» к положению равновесия).

Функции Ляпунова. Имеется определенная классификация: первый метод Ляпунова, второй (прямой) [6]. Суть первого метода состоит в использовании представления решений рядами. Остановимся на втором, как более универсальном. Центральное место занимают *функции Ляпунова*. Устойчивость — качественное понятие, сформулированное в терминах нормы, но отклонение от положения равновесия можно характеризовать и более общими функциями, «похожими» на расстояние.

По-прежнему нас интересует окрестность положения равновесия \bar{x} автономной системы $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(G)$. Без ограничения общности считаем $\bar{x} = 0$. В некоторой области $U \subseteq G$, окрестности нулевой точки покоя, рассмотрим гладкую функцию $V \in C^1(U)$. Она называется *положительно определенной* (в U), если $V(x) > 0$, $x \neq 0$, $V(0) = 0$. Обозначаем $V \triangleright 0$. Функция V *отрицательно определена* ($V \triangleleft 0$), если $-V \triangleright 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Положительно определенная в области $U \subseteq G$ ($\bar{x} \in U$) функция $V \in C^1(U)$ называется *функцией Ляпунова*, если её производная по направлению векторного поля f неположительна:

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) \leq 0, \quad x \in U.$$

Содержательный смысл состоит в следующем. Положительная определенность — свойство расстояния. В данном случае — расстояния до положения равновесия $\bar{x} = 0$. Условие $\dot{V} \leq 0$ означает нестрогое убывание этого «расстояния» вдоль траектории движения, что дает основание ожидать устойчивость \bar{x} .

Замечание 1. Не будем стремиться к максимальной общности. В частности, предположение гладкости V (для возможности

дифференцирования) можно ослабить. Общая теория, когда система нестационарна и изучается устойчивость решения (не обязательно положения равновесия), изложена в [6, 10].

Перейдем к формулировкам и доказательству теорем Ляпунова об устойчивости движения (на принятом уровне общности).

ТЕОРЕМА 3. *Если в некоторой области U ($\bar{x} = 0 \in U$) существует функция Ляпунова, то равновесие $\bar{x} = 0$ устойчиво.*

Доказательство. Согласно определению устойчивости $\forall \varepsilon > 0$ нужно указать $\delta > 0$. . . Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем положительное $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ из условия $\bar{U}_{\varepsilon_0} = \{x: |x| \leq \varepsilon_0\} \subset U$. Так как сфера $S_{\varepsilon_0} = \{x: |x| = \varepsilon_0\}$ компактна, функция V непрерывна и $V > 0$ на S_{ε_0} , то $\min V(x) = m > 0$, $x \in S_{\varepsilon_0}$. Выберем настолько малый замкнутый шар с центром в нуле $\bar{U}_\delta \subset U_{\varepsilon_0}$, чтобы $V < m$ при $x \in \bar{U}_\delta$. Это возможно по непрерывности V и $V(0) = 0$.

Так как $\dot{V}(x) \leq 0$, $x \in U$, то при $x_0 \in \bar{U}_\delta$ имеем $V(x_0) < m$ и $V(\varphi(t, x_0)) < m$, $t > 0$. С ростом времени траектория движения не может пересечь S_{ε_0} (и S_ε), так как на S_{ε_0} имеем $V \geq m$. Она остается в пределах U_ε , что и означает устойчивость. \square

Замечание 2. Доказательство неполно. Доказано лишь, что на промежутке $[0, \omega)$ максимального продолжения решения вправо траектория движения остается в окрестности U_{ε_0} нулевого положения равновесия. По *теореме о продолжении решений* [2, 3, 23] $\omega = +\infty$: решения автономного уравнения с начальными данными из компакта продолжимо либо неограниченно, либо вплоть до границы этого компакта. Если не ссылаться на этот результат, то для замкнутости изложения формально можно перед формулировкой теоремы добавить *предположение* о продолжимости $\varphi(t, x_0)$ на $[0, +\infty)$ при достаточно малых x_0 .

ТЕОРЕМА 4. *Если производная в силу системы $\dot{x} = f(x)$ функции Ляпунова отрицательно определена в окрестности нуля U ($\dot{V} < 0$), то точка покоя $\bar{x} = 0$ асимптотически устойчива.*

Доказательство. Устойчивость обеспечена. Остается доказать стремление решения к нулю при достаточно малых x_0 . Фикси-

руем ε_0, δ из доказательства теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$w(t) = V(\varphi(t, x_0)), \quad 0 < |x_0| < \delta, \quad t \in [0, +\infty).$$

Поскольку по теореме единственности $\varphi(t) = \varphi(t, x_0) \neq 0 \forall t$, то $\dot{w}(t) < 0$ и функция $w(t)$ монотонно убывает с ростом времени. Из ограниченности снизу следует $\lim w(t) = \alpha \geq 0, t \rightarrow +\infty$.

Предположим, что предел $\alpha > 0$. Тогда справедлива оценка $|\varphi| \geq \beta > 0, t \in [0, +\infty)$, т. е. положительная полутраектория $\gamma^+ = \{\varphi(t), t \geq 0\}$ остается вне некоторого шара положительного радиуса с центром в нуле. Если это не так, то существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ из условия $\lim \varphi(t_k) = 0, k \rightarrow +\infty$, и по непрерывности $w(t_k) \rightarrow 0$. Противоречие с предположением $\lim w(t) = \alpha > 0, t \rightarrow +\infty$. Итак $\alpha > 0 \Rightarrow |\varphi| \geq \beta > 0$. Обозначим

$$\mu = \max \dot{V}(x) < 0, \quad \beta \leq |x| \leq \varepsilon_0 \quad (\dot{V} \in C(U), \dot{V} \triangleleft 0).$$

Тогда $\dot{w}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq \mu$ и после интегрирования получаем

$$w(t) \leq w(0) + \mu t \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Вместе с тем $w(t) \geq 0$, так что предположение $\alpha > 0$ неверно.

Итак, $\lim w(t) = 0, t \rightarrow +\infty$. Докажем, что отсюда следует $\varphi(t) \rightarrow 0$. Опять рассуждаем от противного. Если $\varphi(t) \not\rightarrow 0$, то найдутся $\sigma > 0$ и последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ из условия $|\varphi(t_n)| \geq \sigma$. На компакте $0 < \sigma \leq |x| \leq \varepsilon_0$ функция $V(x)$ положительна и отделена от нуля: $V(x) \geq \xi > 0$. Тогда $w(t_n) = V(\varphi(t_n)) \geq \xi$, что противоречит $\lim w(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\varphi(t, x_0) \rightarrow 0$ при $|x_0| < \delta$ и $t \rightarrow +\infty$, что и доказывает асимптотическую устойчивость равновесия $\bar{x} = 0$. \square

Геометрическая и механическая интерпретация. Условие

$$\dot{V}(x) = \langle \text{grad } V, f \rangle < 0, \quad x \in U, \quad x \neq 0,$$

означает, что градиент V и вектор фазовой скорости f образуют тупой угол. При достаточно малых $\alpha > 0$ поверхности уровня $L_\alpha = \{x | V(x) = \alpha\} \subset U$ «окружают» равновесие $\bar{x} = 0$.

Градиент функции V ненулевой на L_α , и, следовательно, L_α — гладкая гиперповерхность. Поскольку для любой гладкой кривой $t \mapsto \psi(t) \in L_\alpha$ выполняется $V(\psi(t)) = \alpha \Rightarrow \langle \text{grad } V, \dot{\psi} \rangle = 0$ ($d/dt = 0$), то $\text{grad } V \perp L_\alpha$. Траектории движения при выполнении неравенства $\langle \text{grad } V, f \rangle < 0$ «втекают» внутрь криволинейного «эллипсоида», ограниченного поверхностью уровня L_α . С уменьшением α фазовый вектор $\varphi(t)$ стремится к нулю.

Рассмотрим движение точки массы m в потенциальном поле:

$$m\ddot{x} = -\text{grad } U(x), \quad U \in C^1, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Переходим к эквивалентной системе $m\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\text{grad } U(x)$. Положение равновесия определяется равенствами $\text{grad } U(\bar{x}) = 0, \quad y = 0$, т. е. \bar{x} — стационарная точка потенциальной энергии.

Пусть \bar{x} — изолированная точка минимума U . Тогда положение равновесия $(\bar{x}, 0)$ устойчиво. Действительно, полагаем $U(\bar{x}) = 0$ (потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого). Первый интеграл

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2m} + U(x) \quad (\dot{V}(x, y) = 0, \quad y^2 = \langle y, y \rangle)$$

имеет смысл полной механической энергии. В окрестности положения равновесия функция V положительно определена. Устойчивость $(\bar{x}, 0)$ следует из теоремы 3. Это утверждение было высказано Лагранжем и впоследствии доказано Дирихле.

Устойчивость по линейному приближению. Определим процедуру *линеаризации* в окрестности точки покоя \bar{x} . Пусть $f \in C^2(G \rightarrow \mathbb{R}^n), \bar{U}_\varepsilon(\bar{x}) \subset G \subseteq \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. По формуле Тейлора

$$f(x) = f'_x(\bar{x})(x - \bar{x}) + g(x), \quad |g(x)| \leq C|x - \bar{x}|^2, \quad x \in U_\varepsilon$$

($g(x) = O(|x - \bar{x}|^2)$). При малом $\varepsilon > 0$ слагаемое $g(x)$ мало. Переходя к отклонениям $y = x - \bar{x}$ и отбрасывая $g(x)$, получаем линеаризованную систему в окрестности \bar{x} : $\dot{y} = Ay, \quad A = f'_x(\bar{x})$.

ТЕОРЕМА 5. Если собственные числа матрицы $A = A_{n \times n}$ имеют отрицательные действительные части ($\text{Re } \lambda_j(A) < 0$), то положение равновесия \bar{x} асимптотически устойчиво.

Доказательство. Без ограничения общности $\bar{x} = 0$ ($y = x$). Рассмотрим линейное приближение $\dot{x} = Ax$. Тогда

$$x = \varphi(t, x_0) = e^{At}x_0, \quad |\varphi(t, x_0)| \leq M e^{-\alpha t}|x_0|,$$

$M = \text{const} > 0$, $\alpha > 0$, $\text{Re } \lambda_j < -\alpha < 0$. Определим функцию

$$V(x_0) = \int_0^{+\infty} |\varphi(\tau, x_0)|^2 d\tau, \quad \varphi(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Экспоненциальная оценка $|\varphi|$ гарантирует сходимость несобственного интеграла. В терминах матричной экспоненты

$$V(x_0) = x_0^\top B x_0, \quad B = \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} e^{At} dt.$$

В силу произвольности x_0 определена квадратичная форма $V(x) = x^\top B x$ с симметричной матрицей B . Более того, она положительно определена, поскольку

$$V(x_0) \geq 0, \quad V(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\cdot, x_0) = 0, \quad x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Вычислим производную $\dot{V}(x)$ в силу линеаризованной системы $\dot{x} = Ax$. По определению и групповому свойству решений

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 V(\varphi(t, x_0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \int_0^\infty |\varphi(\tau, \varphi(t, x_0))|^2 d\tau \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \int_0^\infty |\varphi(\tau + t, x_0)|^2 d\tau = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \int_t^\infty |\varphi(\tau, x_0)|^2 d\tau \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left(\int_t^a + \int_a^\infty \right) = -|\varphi(t, x_0)|^2 \Big|_{t=0} = -x_0^2 = -x_0^\top x_0. \end{aligned}$$

Вследствие произвольности x_0 имеем $\dot{V}(x) = -x^\top x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Вычислим теперь $\dot{V}(x)$ в силу исходной нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x), \quad |g(x)| \leq C|x|^2, \quad x \in U_\varepsilon(0).$$

В достаточно малой ε_0 -окрестности $\bar{x} = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^\top B x + x^\top B \dot{x} = (x^\top A^\top + g^\top) B x + x^\top B (Ax + g) = \\ &= x^\top (A^\top B + B A) x + 2x^\top B g \leq -x^\top x + C_1 |x|^3 = \\ &= -x^\top x (1 - C_1 |x|) < 0, \quad |x| < \varepsilon_0 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

По теореме 4 имеет место асимптотическая устойчивость. \square

Замечание 3. На самом деле доказано нечто большее. В достаточно малой ε_* -окрестности точки \bar{x} справедливо неравенство

$$\dot{V}(x) \leq -C_2 x^\top x \leq -r_* V(x) \quad (C_2 = 1 - C_1 \varepsilon_* > 0, r_* > 0).$$

Второе неравенство следует из положительной определенности:

$$V(x) = x^\top B x \succ 0 \Rightarrow r_1 |x|^2 \leq V(x) \leq r_2 |x|^2, \quad r_j > 0.$$

Достаточно взять $r_1 = \min V(x)$, $r_2 = \max V(x)$ на единичной сфере $|x| = 1$ и затем домножить оценку $r_1 \leq V(x) \leq r_2$ на $|x|^2$. Проинтегрируем неравенство $\dot{V} \leq -r_* V$ на решении $x = \varphi(t, x_0)$:

$$\int_0^t \dot{V} V^{-1} dt \leq -r_* t \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-r_* t}.$$

С учетом $|x|^2 \leq V/r_1 \leq |x|^2 r_2/r_1$ получаем следующую оценку:

$$|\varphi(t, x_0)| \leq r_3 e^{-r_4 t} |x_0|, \quad r_3 > 0, \quad r_4 = 0.5 r_*.$$

Тем самым доказана *экспоненциальная устойчивость* $\bar{x} = 0$.

Изучим подробнее производную $\dot{V}(x)$ в линейном случае:

$$\dot{V}(x) = \langle \text{grad } V, Ax \rangle = 2x^\top B Ax = -x^\top x.$$

После симметризации матрицы квадратичной формы (заменяя $2BA$ на $A^\top B + BA$) получаем *матричное уравнение Ляпунова*:

$$A^\top B + BA = -W \quad (W = E).$$

При определении функции V вместо $|\varphi|^2$ можно было бы взять квадратичную форму $\varphi^\top W \varphi$ с симметричной положительно определенной матрицей W . Выкладки не претерпевают существенных изменений: вместо единичной матрицы E будет W . Следовательно, при $\text{Re } \lambda_j(A) < 0$ для любой $W = W^\top \succ 0$ существует решение $B = B^\top \succ 0$ матричного уравнения Ляпунова ($E \rightarrow W$).

Ляпуновым доказана единственность в классе симметричных матриц B . Более того, доказано обратное: если хотя бы для

одной матрицы $W = W^\top \succ 0$ существует решение $B = B^\top \succ 0$, то матрица A устойчива в смысле $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$. Это позволяет решать вопрос об асимптотической устойчивости алгебраическими средствами, решая линейное матричное уравнение Ляпунова без построения матричной экспоненты и вычисления несобственных интегралов. Развитие теории устойчивости изложено в [6, 10].

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Оптимальное демпфирование переходных процессов

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T].$$

Элементы матрицы $A_{n \times n}$ и $B_{n \times r}$ непрерывны на отрезке времени $[0, T]$. Допустимыми считаем кусочно непрерывные управления $u(\cdot) \in KC([0, T] \rightarrow U)$. Значения $u(t)$ ограничены заданным множеством $U \subseteq \mathbb{R}^r$, например, $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$, $1 \leq i \leq r$. Поскольку значения $u(t)$ в конечном числе точек разрыва первого рода не влияют на траекторию движения $x = \varphi(t, x_0, u)$, то полагаем

$$u(t) = u(t+0), \quad t \in [0, T), \quad u(T) = u(T+0).$$

Тем самым описан класс допустимых управлений $\{u(\cdot)\} = \mathcal{U}$. Производные по времени в граничных точках и точках разрыва u (когда «рвётся» f) понимаются односторонними: справа на $[0, T)$ и слева при $t = T$. Начальные данные x_0 воспринимаем как параметр: вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ фиксирован, но произволен.

Считаем, что фазовый вектор $x(t)$ имеет смысл отклонения от заданного режима функционирования объекта управления (в результате линеаризации) и задача системы управления состоит в парировании (демпфировании) переходного процесса $x(t)$, т. е. требуется перевести состояние $x(t)$ как можно ближе к положению равновесия $x(t) \equiv 0$ (при $u(t) \equiv 0$). В более общей постановке вместо точки покоя может фигурировать некоторое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, например, заданная целевая поверхность.

Рассмотрим функцию $V(t, x)$ (функцию Ляпунова), которая является в некотором смысле мерой отклонения (расстоянием) переходного процесса $x(t)$ до целевого множества S . Это расстояние требуется уменьшать. Считаем $V \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 ([10, 11]). Допустимое программное управление $u^0(\cdot) \in \mathcal{U}$ называется оптимальным по отношению к демпфированию функции V , если эта функция убывает вдоль движения $\varphi^0(t) = \varphi(t, x_0, u^0)$ наискорейшим образом.

Уточним, что значит «наискорейшим образом». Приведем определение производной функции по направлению поля $f(x)$:

$$\dot{V}(t, x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} V(\tau, \varphi(\tau)),$$

где φ — решение уравнения $\dot{x} = f(x)$, проходящее в момент времени t через точку x . Вернемся к исходной системе $\dot{x} = f(t, x, u)$. Фиксируем произвольные управление $u \in \mathcal{U}$, начальные данные $x(0) = x_0$, точку $(t_0, y_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и решение $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с условием $\varphi(t_0) = y_0$. На решении φ получаем скалярную функцию $w(t) = V(t, \varphi(t))$, $t \in [0, T]$. Вычислим производную $w(t)$ при $t = t_0$ (скорость изменения V вдоль интегральной кривой):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} V(t, \varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, y_0) \cdot f(t_0, y_0, u(t_0)).$$

Это число обозначается $\dot{V}(t_0, y_0)$ или $L_f V(t_0, y_0)$. Управление $u \in \mathcal{U}$ считается произвольным, но фиксированным. Поскольку t_0, y_0 выбирались независимо, то корректно определена функция

$$\dot{V}(t, x) = \partial_t V + \langle \text{grad}_x V, f \rangle, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для управления $u^0 \in \mathcal{U}$ (если оно существует!) по определению

$$\begin{aligned} \partial_t V(t, \varphi^0(t)) + \partial_x V(t, \varphi^0(t)) \cdot f(t, \varphi^0(t), u^0(t)) = \\ = \partial_t V(t, \varphi^0(t)) + \min_{v \in \mathcal{U}} \left\{ \partial_x V(t, \varphi^0(t)) \cdot f(t, \varphi^0(t), v) \right\}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

По содержательному смыслу задачи подразумевается, что эти значения неположительны, т. е. ресурсов управления достаточно, чтобы обеспечить убывание «расстояния» V . Нулевую скорость $\dot{V} = 0$ для удобства включаем в «убывание». В более общей постановке задачи следует вместо наискорейшего убывания говорить о минимальной скорости изменения.

Приведем схему определения управления, оптимального в смысле демпфирования V . Составим функцию

$$W(t, x, u) = \partial_x V(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U,$$

и найдем минимум по $u \in U$, воспринимая t, x как параметры: $u_{\min} = u^0(t, x)$. Подставим это выражение в уравнение движения: $\dot{x} = f(t, x, u^0(t, x))$. При конкретном $x_0 = x(0)$ получаем решение $x = \varphi(t)$ и зависимость от времени $u^0(t) = u^0(t, \varphi^0(t))$.

Управление в форме обратной связи $u(t, x)$ предпочтительнее программного $u(t)$, поскольку по текущему фазовому состоянию $x(t)$ (при наличии соответствующих датчиков) формируется управляющий сигнал $u[t] = u(t, x(t))$, реагирующий на возможное внешнее возмущение движения (в отличие от $u(t)$).

Замечание 4. Даже в рассматриваемом линейном случае, когда $f = Ax + Bu$, реализация схемы — сложная математическая задача. В общем случае минимума по u может не существовать. Если U является многогранником, то имеем семейство задач линейного программирования. Никакой априорной гарантии единственности решения и гладкости возможных ветвей $u^0(t, x)$ нет. Могут возникнуть проблемы с определением решения $\varphi^0(t)$ или недопустимостью $u^0(t) = u^0(t, \varphi^0(t))$. Для примера пусть V является квадратичной формой $x^\top P(t)x > 0$ ($P = P^\top$), а управление скалярно и ограничено: $r = 1$, $B(t) = b(t) \in \mathbb{R}^n$, $|u(t)| \leq 1$. Тогда

$$\partial_x V(t, x) [A(t)x + b(t)u] \rightarrow \min_{|u| \leq 1} \Rightarrow u^0(t, x) = -\text{sign}\{x^\top P(t)b(t)\},$$

$$\dot{x} = f(t, x, u^0(t, x)) = A(t)x - b(t)\text{sign}\{b^\top(t)P(t)x\}.$$

Возникает, вообще говоря, непродолжимость движений через поверхность разрыва $H: b^\top(t)P(t)x = 0$. В физических системах за счет инерционности происходят малые вибрации вблизи H .

Линейно-квадратичная задача оптимизации:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad U = \mathbb{R}^r,$$

$$J(u(\cdot)) = 0.5 x^\top(T)Fx(T) + 0.5 \int_0^T \{x^\top Q(\tau)x + u^\top R(\tau)u\} d\tau \rightarrow \min.$$

Матрицы $F, Q(t), R(t)$ (размерностей $n \times n, n \times n, r \times r$) симметричны, $F \succeq 0, Q(t) \succeq 0, R(t) \succ 0$ («неравенство» $\succeq 0$ означает неотрицательную определенность квадратичной формы); $A, B, Q, R \in C$ (элементы матриц непрерывны). Начальные данные воспринимаем как параметр: вектор x_0 фиксирован (но произволен). Функционал J интерпретируется как мера отклонения процесса управления $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ от невозмущенного нулевого состояния. Ограничения на значения $u(t)$ отсутствуют, но их «сдерживание» косвенно регулируется выбором матрицы $R(t)$. Множитель 0.5 — из технических соображений, для «компенсации» двойки при дифференцировании квадратичных форм.

Фиксируем допустимое $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и введем функцию

$$V(t, x) = 0.5 x^\top S(t)x + 0.5 \int_0^t \{ \dots \} d\tau, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Под интеграл подставляется $x = x(\tau) = \varphi(\tau; t, x, u)$ — решение, проходящее через точку x в момент времени t . Выбор матрицы S пока ограничим свойствами $S \in C^1, S(t) = S^\top \succeq 0, S(T) = F$. Если вспомнить о неявном (фиксированном) аргументе $u(\cdot)$, то $V(t, x)$ можно воспринимать как функционал, ставящий в соответствие точке (t, x) и управлению $u_{[0,t]}$ (т. е. процессу управления $\{\varphi(\tau), u(\tau)\}_{[0,t]}$) число, являющееся аналогом расстояния до состояния покоя $x \equiv 0, u \equiv 0$ на текущем отрезке времени $[0, t]$.

Вычислим функцию $\dot{V}(t, x)$. Фиксируем произвольную точку $(t_0, y_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и решение $\psi(t) = \varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t; t_0, y_0, u)$ с начальным условием $\psi(t_0) = y_0$. По определению

$$\dot{V}(t_0, y_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} V(t, \psi(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \left\{ 0.5 \psi^\top S \psi + 0.5 \int_0^t \dots d\tau \right\}.$$

Под интегралом $x = x(\tau) = \varphi(\tau; t, \psi(t), u) = \varphi(\tau; t_0, y_0, u)$. В силу последнего равенства интеграл зависит только от переменного верхнего предела t , поэтому справедливо представление

$$\begin{aligned} \dot{V}(t_0, y_0) &= \{0.5 \psi^\top \dot{S} \psi + \psi^\top S \dot{\psi} + 0.5 \psi^\top Q \psi + 0.5 u^\top R u\} \Big|_{t=t_0} \\ &= 0.5 y_0^\top \dot{S}(t_0) y_0 + y_0^\top S(t_0) [A(t_0) y_0 + B(t_0) u(t_0)] + \\ &\quad + 0.5 y_0^\top Q(t_0) y_0 + 0.5 u(t_0) R(t_0) u(t_0). \end{aligned}$$

Или с учетом произвольности точки (t_0, y_0) : $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

$$\dot{V}(t, x) = 0.5 x^\top \dot{S} x + x^\top S [Ax + Bu] + 0.5 x^\top Q x + 0.5 u^\top R u.$$

Если ввести обозначения

$$V_0(t, x) = 0.5 x^\top S(t) x, \quad f_0(t, x, u) = 0.5 x^\top Q(t) x + 0.5 u^\top R(t) u,$$

то в более компактной записи

$$\dot{V}(t, x) = \frac{dV_0}{dt} + f_0 = \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \cdot f(t, x, u) + f_0(t, x, u).$$

Для оптимального демпфирования V выберем $u = u^0(t, x)$, минимизирующее правую часть. По u имеем положительно определенную квадратичную форму, так что по теореме Ферма

$$\partial_u \dot{V} = 0 \Rightarrow x^\top S B + u^\top R = 0 \Rightarrow u^0(t, x) = -R^{-1}(t) B^\top(t) S(t) x.$$

Оптимальное в смысле демпфирования управление получилось в форме линейного синтеза — линейной обратной связи по x .

ТЕОРЕМА 6. Если на оптимальном в смысле демпфирования функции V управлении $u = u^0(t, x)$ справедливо тождество

$$\dot{V}(t, x) \Big|_{u=u^0} \equiv 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то $u^0(t, x)$ — оптимальный синтез в задаче $J(u(\cdot)) \rightarrow \min$.

Прокомментируем утверждение. Подставим линейную обратную связь $u^0(t, x) = -R^{-1}B^T Sx$ в исходную систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu^0 \Rightarrow \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T S)x.$$

Для начальных данных $x(0) = x_0$ получим решение $x = \varphi^0(t)$. Тогда допустимое программное управление $u^0(t) = u^0(t, \varphi^0(t))$ доставляет минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве \mathcal{U} . Подчеркнем, что синтез $u^0(t, x)$ позволяет найти решение исходной задачи в классе $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ при любом заданном x_0 .

Доказательство. В компактной записи по предположению

$$\begin{aligned} \partial_t V_0(t, x) + \min_{v \in U} \left\{ \partial_x V_0(t, x) \cdot f(t, x, v) + f_0(t, x, v) \right\} = \\ = \partial_t V_0 + \partial_x V_0 \cdot f(t, x, u^0(t, x)) + f_0(t, x, u^0(t, x)) = 0. \end{aligned}$$

Фиксируем $x(0) = x_0$, решение $x = \varphi^0(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t, x) = (A - BR^{-1}B^T S)x, \quad x(0) = x_0,$$

и допустимое управление $u^0(t) = u^0(t, \varphi^0(t))$. При любом другом программном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ получим решение $x = \varphi(t) = \varphi(t, x_0, u)$ исходной системы управления $\dot{x} = Ax + Bu$.

По условию теоремы при $x = \varphi^0(t)$, $u = u^0(t)$

$$\frac{dV_0}{dt} + f_0 = \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \cdot f + f_0 = 0, \quad t \in [0, T].$$

Интегрируя это тождество по $t \in [0, T]$, получаем

$$V_0(T, \varphi^0(T)) - V_0(0, x_0) + \int_0^T f_0(t, \varphi^0, u^0) dt = 0, \quad V_0(0, x_0) = J(u^0).$$

На процессе управления $x = \varphi(t)$, $u = u(t)$ имеем

$$\frac{dV_0}{dt} + f_0 \geq 0 \Rightarrow V_0(T, \varphi(T)) + \int_0^T f_0(t, \varphi, u) dt - V_0(0, x_0) \geq 0,$$

откуда следует $J(u(\cdot)) \geq V_0(0, x_0) = J(u^0(\cdot))$. \square

Заметим, что нельзя записать

$$\frac{dV_0}{dt} + f_0 \Big|_{\varphi(t), u(t)} \geq \frac{dV_0}{dt} + f_0 \Big|_{\varphi^0(t), u^0(t)}, \quad t \in [0, T],$$

так как по построению управления $u^0(t, x)$ неравенство гарантировано лишь при одинаковых x :

$$\frac{dV_0}{dt} + f_0 \Big|_{x, u} \geq \frac{dV_0}{dt} + f_0 \Big|_{x, u^0(t, x)}, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Расшифруем теперь краткую запись условия теоремы:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) \Big|_{u^0(t, x)} &= \frac{dV_0}{dt} + f_0 \Big|_{u^0(t, x)} = 0, \quad V_0(t, x) = 0.5 x^\top S(t)x, \\ f &= Ax + Bu, \quad f_0 = 0.5 x^\top Qx + 0.5 u^\top Ru, \quad u^0 = -R^{-1} B^\top Sx, \\ &\Rightarrow 0.5 x^\top \dot{S}x + x^\top S(Ax - BR^{-1} B^\top Sx) + 0.5 x^\top SBR^{-1} B^\top Sx + \\ &+ 0.5 x^\top Qx = 0, \quad 0.5 x^\top \dot{S}x - 0.5 x^\top SBR^{-1} B^\top Sx + \\ &+ 0.5 x^\top (SA + A^\top S)x + 0.5 x^\top Qx = 0. \end{aligned}$$

Поскольку матрицы квадратичных форм симметричны, то

$$\dot{S} = SBR^{-1} B^\top S - SA - A^\top S - Q, \quad S(T) = F.$$

По аналогии с $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ уравнение для S называется *матричным уравнением Риккати*. Его требуется решить в обратном направлении времени ($T \rightarrow 0$). Здесь мы сталкиваемся уже с нелинейными матричными дифференциальными уравнениями [7]. Решая матричное уравнение Риккати на отрезке времени $[0, T]$ с начальными данными $S(T) = F$, получаем оптимальный синтез $u^0(t, x) = -R^{-1}(t)B^\top(t)S(t)x$ в форме линейной обратной связи. При наличии измерений $x(t)$ формируется управляющий сигнал $u^0[t] = u^0(t, x(t))$. Фиксированный начальный вектор x_0 определяет решение $\varphi^0(t)$ задачи $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^\top S)x$, $x(0) = x_0$, и соответствующее оптимальное программное управление $u^0(t) = u^0(t, \varphi^0(t))$.

Матричное уравнение Риккати. Сформулируем лишь основные свойства, подробнее см. [7]. Локально (в окрестности $t = T$) существование и единственность решения $S(t)$ следуют из общих теорем, поскольку матричное уравнение — это система скалярных уравнений для элементов S (с учетом симметричности число уравнений $n(n + 1)/2$). Уже для простейших уравнений с квадратичной нелинейностью (для примера: $y' = y^2$, $y' = y^2 + 1$) возникают проблемы с продолжимостью решений. Для полученного матричного уравнения Риккати доказано: решение $S(t)$ продолжимо на весь отрезок $[0, T]$ и $S(t) = S^\top(t) \geq 0$.

Симметричность следует из того, что после транспонирования получаем ту же задачу Коши для матрицы $S^\top(t)$. Неотрицательность следует из $V_0(t_0, x_0) = J(u^0(\cdot)) \geq 0$ для семейства задач оптимизации на отрезках $[t_0, T] \subseteq [0, T]$. Наиболее сложным является доказательство продолжимости. Здесь ограничимся лишь наводящими соображениями при $n = 1$:

$$\dot{s}(t) = bs^2(t) - r, \quad s(T) = s_T \quad (b, r, s_T > 0).$$

Решение не может пересечь прямую $s(t) = 0$ при монотонном убывании t от значения $t = T$: в такой «первой» точке было бы $\dot{s} \geq 0$, что противоречит уравнению. Вместе с тем решение не может пересечь прямую $s(t) = \sqrt{r/b}$, поскольку на этой прямой $\dot{s} = 0$, а выше $\dot{s} < 0$. Таким образом, решение не может за конечное время уйти на бесконечность: $0 \leq s(t) \leq \sqrt{r/b}$, $t \leq T$.

В случае $Q = 0$ получаем матричное уравнение Бернулли:

$$\dot{S} = SBR^{-1}B^\top S - SA - A^\top S, \quad S(T) = F.$$

Пусть $F = F^\top \succ 0$. Тогда уравнение сводится к системе линейных уравнений (порядка $n(n + 1)/2$ в силу симметричности $S(t)$). Действительно, вычислим производную матрицы $P = S^{-1}$:

$$(S^{-1}S)'_t = (S^{-1})'_t S + S^{-1}\dot{S} = 0 \Rightarrow \dot{P} = -S^{-1}\dot{S}S^{-1}.$$

Умножая матричное уравнение Бернулли слева и справа на S^{-1} , получаем для матрицы P линейное уравнение

$$\dot{P} = PA^\top + AP - BR^{-1}B^\top, \quad P(T) = F^{-1}.$$

Оптимальная стабилизация. Рассмотрим теперь стационарную линейно-квадратичную задачу оптимизации

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad U = \mathbb{R}^r,$$

$$J(u(\cdot)) = 0.5 \int_0^\infty \{x^\top Q x + u^\top R u\} d\tau \rightarrow \min.$$

Здесь все матрицы постоянны, причем Q и R симметричны и положительно определены. Требование сходимости несобственного интеграла диктует условие $x(t) \rightarrow 0$ с достаточной скоростью, поэтому говорят об *оптимальной стабилизации* нулевого решения $x \equiv 0$ (при $u \equiv 0$). Начальный момент времени произволен, так что полагаем $t_0 = 0$. Практически повторяя приведенные выше выкладки, получим *алгебраическое уравнение Риккати*

$$SBR^{-1}B^\top S - A^\top S - SA - Q = 0.$$

Его положительно определенное решение $S = S^\top \succ 0$ определяет оптимальный синтез $u^0(x) = -R^{-1}B^\top Sx$. Полная управляемость пары (A, B) ($\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$) влечет существование и единственность решения $S = S^\top \succ 0$.

По построению матрица S задает положительно определенную квадратичную форму $V_0(x) = 0.5 x^\top Sx$. Вычислим производную $\dot{V}_0(x)$ в силу замкнутой системы $\dot{x} = (A - R^{-1}B^\top S)x$:

$$\dot{V}_0(x) = x^\top S \dot{x} = x^\top (SA - SR^{-1}B^\top S)x.$$

Поскольку $x^\top SAx = 0.5 x^\top (SA + A^\top S)x$, то с учетом матричного уравнения Риккати получаем представление производной

$$\dot{V}_0(x) = -0.5 (x^\top Q + SBR^{-1}B^\top S)x = -0.5 x^\top Qx - 0.5 u^{0\top} R u^0.$$

Это отрицательно определенная квадратичная форма по x с учетом $u^0(x) = -R^{-1}B^\top Sx$. Следовательно, $V_0(x)$ — функция Ляпунова для замкнутой системы, асимптотическая (даже экспоненциальная) устойчивость нулевого решения гарантирована. В курсе математической теории оптимального управления при изучении метода динамического программирования выяснится, что $V_0(x) = B(x)$ — *функция Беллмана*, которую в силу изложенного часто называют *оптимальной функцией Ляпунова*.

Литература

- [1] *Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В.* Дифференциальные уравнения. М.: МГТУ, 2004.
- [2] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
- [3] *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
- [4] *Боярчук А. К., Головач Г. П.* Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [5] *Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2003.
- [6] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [7] *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.
- [8] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.
- [9] *Жабко А. П., Кирпичников С. Н.* Лекции по динамическим системам. Ч. 1–4. СПбГУ, 2004.
- [10] *Зубов В. И.* Теория уравнений управляемого движения. Л.: ЛГУ, 1981.
- [11] *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высшая школа, 1982.
- [12] *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

- [13] *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980.
- [14] *Коддингтон Э. А., Левинсон И. Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
- [15] *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981.
- [16] *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967.
- [17] *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Вышэйшая школа, 1987.
- [18] *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
- [19] *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.
- [20] *Пантелеев А. В., Якимова А. С., Босов А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: МАИ, 2000.
- [21] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
- [22] *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений. М.: Минск, Вышэйшая школа, 1973.
- [23] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
- [24] *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
- [25] *Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. М.: Юнимедиастайл, 2002.
- [26] *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Наука, 1989.

-
- [27] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
- [28] *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
- [29] *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
- [30] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992.
- [31] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [32] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
- [33] *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1986.

Заика Юрий Васильевич

Дифференциальные уравнения

КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебное пособие

Печатается по решению Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН

Редактор Л. С. Баранцева

Сдано в печать 01.09.12.

Формат 60×90_{1/16}. Гарнитура Times. Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 12,0. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Копистар Оптима
г. Петрозаводск, наб. Гюллинга, 11