На правах рукописи

Аксенова Елена Алексеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР ДАННЫХ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2007

Работа выполнена в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Соколов Андрей Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Граничин Олег Николаевич,
	кандидат физико-математических наук, доцент Фомин Анатолий Сергеевич.
Ведущая организация:	Иркутский государственный университет.

Защита состоится "14" ноября 2007 г. в 11:00 час. на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 при Петрозаводском государственном университете по адресу 185910, Петрозаводск, пр. Ленина, д 33

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Петрозаводского государственного университета.

Автореферат разослан "5" октября 2007г.

Ученый секретарь диссертационного совета — В.В. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Наиболее часто используемыми в вычислительной технике и программировании структурами данных являются стеки и очереди. Стеки используются в алгоритмах синтаксического разбора, для анализа скобочной структуры текста и вычисления выражений, в алгоритмах машинной графики, в алгоритмах поиска на графах, в алгоритмах сортировки, в системах управления процессами. FIFO-очереди используются в компьютерных сетях, операционных системах, графических системах, устройствах промышленной автоматики

Во многих приложениях требуется обработка записей с упорядоченными определенным образом ключами. Часто накапливается некоторый набор записей, после чего обрабатывается запись с максимальным значением ключа, затем, возможно, накопление записей продолжается, обрабатывается запись с наибольшим текущим ключом и т. д. Соответствующая структура данных, поддерживающая операции вставки нового элемента и удаления элемента с наибольшим приоритетом, называется очередью по приоритетам. Приложениями очередей по приоритетам являются системы моделирования, в рамках которых ключи могут соответствовать моментам возникновения событий, что обеспечивает возможность их обработки в хронологическом порядке, системы планирования заданий в компьютерных системах, где ключи могут соответствовать приоритетам, указывающим, какой из пользователей должен быть обслужен первым.

В настоящее время все более востребованными становятся устройства с жесткими ограничениями на ресурсы памяти, например, различные сетевые и мобильные устройства, что вызывает особые требования к алгоритмам управления памятью В связи с вышеизложенным актуальной является задача разработки математических моделей и алгоритмов оптимального управления базовыми динамическими структурами данных.

Целью диссертационной работы является построение и анализ математических моделей и оптимальных методов реализации динамических структур данных, таких как стеки, очереди и приоритетные очереди. В качестве критериев оптимальности рассматриваются: минимальное среднее время, затрачиваемое на работу со стеком и на перераспределение памяти после переполнения или опустошения в случае работы с одним стеком в двухуровневой памяти, максимальное среднее время работы до перераспределения памяти после переполнения или опустошения в случае работы с двумя стеками в двухуровневой памяти, максимальное среднее время работы до переполнения выделенного объема памяти в случае работы с двумя и тремя FIFO-очередями и в случае работы с двухприоритетной очередью в памяти одного уровня, минимальная доля потерянных элементов при переполнении выделенного объема памяти в случае работы с тремя FIFO-очередями на бесконечном времени.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели, описывающие процесс работы с одним стеком и двумя параллельными стеками в двухуровневой памяти.

2. Математические модели, описывающие процесс работы с двумя и тремя FIFO-очередями в памяти одного уровня для последовательного, связанного и страничного способов представления.

3. Математические модели, описывающие процесс работы с двухприоритетной очередью в памяти одного уровня для последовательного, связанного и страничного способов представления.

4. Математические модели, описывающие процесс работы с тремя FIFO-очередями на бесконечном времени в памяти одного уровня для последовательного и связанного способов представления.

5 Комплекс алгоритмов и программ, реализующих предложенные в работе математические модели.

Методы исследования. Аппарат случайных блужданий, теория поглощающих и регулярных цепей Маркова, численные эксперименты

Научная новизна. Все предложенные в работе модели и алгоритмы являются новыми

Практическая ценность. Предложены оценки эффективности основных способов представления динамических структур данных в памяти одного и двух уровней. Предложенные в работе математические модели и алгоритмы могут быть использованы при разработке аппаратного и программного обеспечения ЭВМ.

Связь работы с научными программами, темами. Основные результаты диссертации были получены в рамках исследований, выполнявшихся в ходе работы на госбюджетными темами Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. Некоторые результаты диссертационной работы вошли в Основные результаты в области естественных, технических, гуманитарных и общественных наук РАН за 2004 год. Работа поддержана грантами РФФИ №01-01-0113, №03-01-06415 (МАС), №06-01-00303.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Пятом Международном Конгрессе по математическому моделированию (Дубна, 2002 г.), V международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 2003 г.), IV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Летняя сессия, Петрозаводск, июнь 2003 г., Осенняя сессия, Сочи, октябрь 2003 г.), Первой Всероссийской научной конференции «Методы и средства обработки информации» (Москва, 2003 г.), Восьмом международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2004 г), Шестой Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике» (Петрозаводск, 2004 г.), Второй Всероссийской научной конференции «Методы и средства обработки информации» (Москва, 2005 г.), Российско-Скандинавском симпозиуме «Теория вероятностей и ее приложения» (Петрозаводск, 2006 г.), Девятом международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2007 г).

Публикация работ. По теме диссертации опубликованы 9 статей, в том числе 3 статьи в журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК, и 8 тезисов докладов

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 124 страницы Список литературы содержит 61 наименование.

Содержание диссертации

Во **введении** отражена актуальность работы, приведен обзор литературы по теме, сформулирована цель исследования, приведены основные результаты работы

В **первой главе** рассмотрены задачи оптимального управления стеками в двухуровневой памяти.

В первом параграфе предложена и исследована математическая модель поведения стека, когда вероятность операции, которая будет произведена со стеком на следующем шаге, зависит от операции, произведенной на текущем шаге. В качестве критерия оптимальности рассмотрено минимальное среднее время, затрачиваемое на работу со стеком и на перераспределение памяти после переполнения или опустошения.

В задаче исследуется стек, значительно превосходящий выделенный для него участок быстрой памяти размера m В этом случае в быстрой памяти всегда хранится вершина стека x, а остальная часть y находится в памяти второго уровня. После переполнения или опустошения вершины стека происходит перераспределение памяти так, что в быстрой памяти всегда остается x_0 верхних элементов стека и процесс начинается из состояния x_0. Необходимо определить такое состояние x_0, из которого следует начинать работу после перераспределения памяти, чтобы среднее время, затрачиваемое на работу со стеком и на перераспределение памяти после переполнения или опустошения стека, было минимально Предполагается, что при переполнении вершины стека нижняя часть стека передвигается в память второго уровня, а вершина сдвигается в начало памяти

В начальный момент времени вершина стека с некоторыми вероятностями может перейти вправо или влево, затем вероятности переходов изменяются Если стек перешел в состояние $x_0 - 1$, то вероятность возврата в состояние x_0 равна p_1, а вероятность перехода в состояние $x_0 - 2$ равна $q_1 = 1 - p_1$. Если стек перешел в состояние $x_0 + 1$, то вероятность возврата в состояние x_0 равна p_2, а вероятность перехода в состояние $x_0 + 2$ равна $q_2 = 1 - p_2$.

В качестве математической модели процесса работы со стеком рассмотрено одномерное случайное блуждание, где координата точки соответствует количеству элементов в стеке Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова путем удвоения числа состояний. В качестве состояний процесса рассмотрены переходы из одной точки в другую. Каждой точке $\imath$ поставлена в соответствие пара состояний $(\imath, \imath + 1)$ и $(\imath + 1, \imath)$.

Известны временные характеристики памяти: время доступа к вершине стека в быстрой памяти t_0, время перемещения одного элемента в быстрой памяти t_1, время доступа к памяти второго уровня t_2, время обмена одним элементом между уровнями памяти t_3. Предполагается, что потери времени при перемещении элементов пропорциональны числу перемещаемых элементов. Определены функции затрат времени.

- $f(x) = t_0$ – затраты времени на доступ к вершине стека,
- $f(-1) = t_2 + t_3(x_0 + 1) + t_0$ – затраты времени на доступ и перемещение элементов между уровнями памяти при опустошении,
- $f(m+1) = t_2 + (m+1-x_0)t_3 + t_1(x_0 - 1) + t_0$ – затраты времени на доступ и перемещение элементов между уровнями памяти при переполнении.

Для стековой памяти средний коэффициент потерь равен $1/T(x_0)$, где $T(x_0)$ – это математическое ожидание числа шагов до перераспределения, если процесс начался в состоянии x_0. Среднее время доступа $F(x_0)$ вычисляется по формуле:

$$F(x_0) = \frac{1}{T(x_0)}\, C(x_0) + \frac{T(x_0) - 1}{T(x_0)}\, t_0 = t_0 + \frac{C(x_0) - t_0}{T(x_0)},$$

где $p_{x_0,-1}$ – это вероятность попадания из x_0 в -1, $p_{x_0,m+1}$ – это вероятность попадания из x_0 в $m + 1$, $C(x_0) = p_{x_0,-1} f(-1) + p_{x_0,m+1} f(m + 1)$ –

средние затраты времени на перераспределение памяти при переполнении и опустошении, $T(x_0)$ – среднее время работы до перераспределения.

Рассмотрена матрица R вероятностей переходов из невозвратных состояний в поглощающие Доказана теорема о структуре матрицы R.

Среднее время работы до перераспределения памяти $T(x_0)$ вычисляется с помощью фундаментальной матрицы $N = (I - Q)^{-1}$, где I – единичная матрица, Q – матрица вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Элемент N_{ij} имеет смысл кол-ва единиц времени, которое процесс находился в состоянии j если блуждание началось из состояния i Вероятности $p_{x_0,-1}$ и $p_{x_0,m+1}$ вычисляются с помощью матрицы $B = (I - Q)^{-1}$ $R = N$ R Элемент $B[i,j]$ равен вероятности поглощения в состоянии j, если начальным было состояние i. Для определения оптимального состояния x_0 необходимо перебрать все возможные начальные состояния, вычислить для каждого среднее время доступа и выбрать состояние, которому соответствует минимальное время.

Для реализации алгоритма решения задачи разработана программа для ЭВМ, которая для заданных вероятностных характеристик и размера памяти генерирует матрицу Q, вычисляет матрицы N и B, вычисляет среднее время доступа $F(x_0)$ и определяет оптимальное состояние x_0. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

При $p_1 = p_2 = 1/2$ в качестве математической модели рассмотрено классическое случайное блуждание. Тогда $p_{x_0,-1} = 1 - \frac{x_0+1}{m+2}$, $p_{x_0,m+1} = \frac{x_0+1}{m+2}$, $T(x_0) = (x_0 + 1)(m - x_0 + 1)$. Требуется найти x_0, которое минимизирует функцию

$$F(x_0) = t_0 + \frac{p_{x_0,-1}(t_2 + t_3(x_0 + 1) + t_0)}{(x_0 + 1)(m - x_0 + 1)} +$$

$$+ \frac{p_{x_0,m+1}(t_2 + t_3(m - x_0 + 1) + t_1(x_0 - 1) + t_0) - t_0}{(x_0 + 1)(m - x_0 + 1)}$$

Считая, что $F(x_0)$ – функция непрерывного аргумента, показано, что оптимальное значение параметра вычисляется по формуле·

$$x_0 = \frac{-t_2(m + 2) - t_1 m + (m + 2)\sqrt{t_2(t_2 + t_1 m)}}{t_1 m}$$

Во втором параграфе предложена и исследована математическая модель оптимального управления двумя параллельными стеками В качестве критерия оптимальности рассмотрено максимальное среднее время работы со стеками до перераспределения памяти после переполнения или опустошения.

В задаче исследуются два стека, растущие навстречу друг другу в области памяти размера m единиц. Размеры стеков превосходят объем быстрой памяти. В этом случае в быстрой памяти хранятся только вершины стеков, а остальные части хранятся в памяти второго уровня. Если вершина одного из стеков стала пустой или стеки заполнили всю быструю память, т е. произошло переполнение стеков, то происходит обмен с памятью второго уровня так, что всегда приходим к некоторому заданному состоянию памяти, после чего начинается следующий этап работы. Параллельное выполнение операций подразумевает возможность одновременной работы со стеками. Заданы вероятностные характеристики стеков. Необходимо определить состояние памяти s_0, в которое в зависимости от заданных вероятностных характеристик стеков следует переходить после обращения к памяти второго уровня, чтобы среднее время работы до следующего перераспределения памяти было максимально, т.е. чтобы минимизировать среднее число обменов между уровнями.

Пусть вершина первого стека x_1, вершина второго стека x_2. В качестве математической модели процесса работы со стеками рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в области $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 \leq m$, где $x_1 = -1, x_2 = -1, x_1+x_2 = m+1, x_1+x_2 = m+2$ – поглощающие экраны

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова Предложена нумерация состояний области блуждания. Рассмотрена матрица Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные Доказана теорема о структуре матрицы Q при заданной нумерации состояний.

Для решения задачи необходимо вычислить фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$ Для вычисления среднего времени работы со стеками необходимо найти суммы элементов строк матрицы N. Для того чтобы найти оптимальное состояние $s_0 = (x_1^0, x_2^0)$, необходимо из полученных сумм элементов матрицы N выбрать максимальную. Номер состояния, соответствующий максимальному времени, определяется однозначно с помощью матрицы N, этому номеру соответствует определенное состояние памяти s_0.

Для реализации алгоритма решения задачи разработана программа для ЭВМ, которая для заданных вероятностных характеристик и размера памяти генерирует матрицу Q, вычисляет матрицу N и определяет оптимальное состояние $s_0 = (x_1^0, x_2^0)$. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

Во **второй главе** рассмотрена задача оптимального управления двумя очередями в памяти одного уровня Предложены и исследованы математические модели, описывающие процесс работы с двумя FIFO-очередями.

В задаче исследуются две FIFO-очереди, расположенные в области памяти размера m единиц В очередях хранятся данные фиксированного размера Заданы вероятностные характеристики очередей При исключении элемента из пустой очереди не происходит завершение работы. Рассматриваются связанный и страничный способы организации двух очередей. Необходимо определить, какой из способов организации очередей является оптимальным. В качестве критерия оптимальности рассматривается максимальное среднее время работы с очередями до переполнения выделенного объема памяти.

Пусть текущие длины очередей x_1 и x_2. В связанном способе организации очередь представлена в виде связанного списка, каждый элемент которого состоит из двух единиц памяти, одна из которых используется для хранения информации, вторая содержит указатель (связь) на следующий элемент в списке. Предполагается, что m кратно 2 При таком представлении очередей всего будет $\frac{m}{2}$ элементов. Для хранения указателей используется $\frac{m}{2}$ единиц памяти, для хранения информации используется $\frac{m}{2}$ единиц памяти В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 < \frac{m}{2} + 1$, где $x_1 + x_2 = \frac{m}{2} + 1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $x_1 = -1$ и $x_2 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$ Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти Длина каждого элемента очереди будет $L + 1$, где одна единица памяти содержит указатель на следующий элемент Предполагается, что m кратно $L + 1$. Количество элементов в этом случае будет $\frac{m}{L+1}$. Для хранения указателей используется $\frac{m}{L+1}$ единиц памяти. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 < \frac{m}{L+1} + 1$, где $x_1 + x_2 = \frac{m}{L+1} + 1$ – поглощающий экран, $x_1 = -1$ и $x_2 = -1$ – отражающие экраны Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

В страничном способе организации очередь представлена в виде связанного списка страниц размера x единиц памяти. Если одна очередь заняла страницу, то другая очередь не может ее использовать Предполагается, что m кратно x. Количество страниц равно $\frac{m}{x}$ Для хранения указателей используется $\frac{m}{x}$ единиц памяти, для хранения информации используется

$m - \frac{m}{x}$ единиц памяти, для хранения информации у каждой страницы используется $x-1$ единиц памяти При $x = 2$ получаем связанное представление очередей В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 < m - \frac{m}{x}+1$, где $x_1+x_2 = m - \frac{m}{x}+1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $x_1 = -1$ и $x_2 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$ Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран

Для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова Предложена нумерация состояний области блуждания Рассмотрена матрица Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Доказана теорема о структуре матрицы Q при заданной нумерации состояний.

В случае страничной организации очередей рассмотрена функция $F(x) = m - \frac{m}{x} - 3\ \frac{x-1}{2}, m > 0, x > 2$ – среднее количество единиц памяти, которые заняты для хранения информации при переполнении какой-либо из очередей. Определен оптимальный размер страницы $x^* = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$ В качестве оптимального размера страницы рассмотрены целочисленные значения $\lfloor x^* \rfloor$ и $\lceil x^* \rceil$.

Для решения задачи необходимо вычислить фундаментальную матрицу $N = (I-Q)^{-1}$. Для вычисления среднего времени работы с очередями необходимо просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует процессу блуждания, выходящему из состояния $x_1 = x_2 = 0$.

Для страничного способа организации вычисляется оценка сверху и оценка снизу для реального среднего времени работы Для оценки сверху рассмотрено блуждание в области $x_1+x_2 < m - \frac{m}{x}+1$, а для оценки снизу – блуждание в области $x_1+x_2 < m - \frac{m}{x} - 3(x-2)+1$, где слагаемое $3(x-2)$ – это три страницы, у которых при переполнении какой-либо из очередей заполнено по одной ячейке

Сравнивая области блуждания для связанного и страничного способов организации, определено, что для размера памяти $m \in (24, \infty)$ область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$. Поэтому для $m > 24$ в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$. Также определено, что область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{6}$ Поэтому в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{6}$.

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q, вычисляют матрицу N и среднее время работы для каждого из рассмотренных способов организации очередей. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В **третьей главе** рассмотрена задача оптимального управления очередью с двумя приоритетами в памяти одного уровня. Предложены и исследованы математические модели, описывающие процесс работы с приоритетной очередью.

В задаче исследуется очередь с двумя приоритетами, расположенная в области памяти размера m единиц. Такая приоритетная очередь представлена в виде двух FIFO-очередей Первой очереди присвоен приоритет 1, второй очереди – приоритет 2 Наивысший приоритет 2 Исключение элемента из очереди происходит по наивысшему приоритету Это означает, что пока вторая FIFO-очередь не пуста, исключение элементов происходит из этой очереди. Как только вторая FIFO-очередь станет пустой, исключение элементов будет происходить из первой FIFO-очереди. При исключении элемента из пустой очереди не происходит завершение работы Заданы вероятностные характеристики очередей. Рассматриваются последовательный, связанный и страничный способы организации FIFO-очередей. Необходимо определить, как распределить память между FIFO-очередями в последовательном способе, и какой из способов организации очередей является оптимальным. В качестве критерия оптимальности рассматривается максимальное среднее время работы с приоритетной очередью до переполнения выделенного объема памяти.

Пусть текущие длины FIFO-очередей x_1 и x_2 В последовательном способе организации каждой FIFO-очереди выделено некоторое количество единиц памяти из данных m единиц. Пусть s – количество единиц памяти, выделенных первой FIFO-очереди, тогда $(m-s)$ – количество единиц памяти, выделенных второй FIFO-очереди В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в двухмерном пространстве $0 \leq x_1 < s+1$, $0 \leq x_2 < m-s+1$, где $x_1 = s+1$, $x_2 = m-s+1$ – поглощающие экраны, попадание на которые характеризуется как переполнение одной из FIFO-очередей, $(-1,0)$ и $(0,-1)$ – отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$ возможно исключение из пустой очереди Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо определить такое значение $0 \le s \le m$, чтобы среднее время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти Предполагается, что m кратно L. Количество элементов равно $\frac{m}{L}$. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в двухмерном пространстве $0 \le x_1 < s+1$, $0 \le x_2 < \frac{m}{L} - s + 1$, где $x_1 = s+1$, $x_2 = \frac{m}{L} - s + 1$ – поглощающие экраны, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$ Необходимо определить такое значение $0 \le s \le \frac{m}{L}$, чтобы среднее время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

В связанном способе организации FIFO-очередь представлена в виде связанного списка элементов. Предполагается, что m кратно 2. Количество элементов равно $\frac{m}{2}$. В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 < \frac{m}{2} + 1$, где $x_1 + x_2 = \frac{m}{2} + 1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$ возможно исключение из пустой очереди Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти. Длина каждого элемента очереди будет $L + 1$, где одна единица памяти содержит указатель на следующий элемент. Предполагается, что m кратно $L + 1$. Количество элементов в этом случае будет $\frac{m}{L+1}$ Для хранения указателей используется $\frac{m}{L+1}$ единиц памяти В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 < \frac{m}{L+1} + 1$, где $x_1 + x_2 = \frac{m}{L+1} + 1$ – поглощающий экран, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$ Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

В страничном способе организации FIFO-очередь представлена в виде связанного списка страниц размера x единиц памяти. Предполагается, что m кратно x Для хранения указателей используется $\frac{m}{x}$ единиц памяти, для хранения информации используется $m - \frac{m}{x}$ единиц памяти Количество страниц равно $\frac{m}{x}$. Для хранения информации у каждой страницы используется $x - 1$ единиц памяти. При $x = 2$ получаем связанное представление очередей. В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 < m - \frac{m}{x} + 1$, где $x_1 + x_2 = m - \frac{m}{x} + 1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$ возможно исключение из пустой очереди. Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$ Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

В каждом из рассмотренных способов организации FIFO-очередей для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова, предложена нумерация состояний области блуждания, рассмотрена матрица Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные и доказана теорема о структуре матрицы Q при заданной нумерации состояний

Для случая страничного представления рассмотрена функция $F(x) = m - \frac{m}{x} - 3 \quad \frac{x-1}{2}, m > 0, x > 2$ – среднее количество единиц памяти, которые заняты для хранения информации при переполнении какой-либо из FIFO-очередей. Определен оптимальный размер страницы $x^* = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$. В качестве оптимального размера страницы рассмотрены целочисленные значения $\lfloor x^* \rfloor$ и $\lceil x^* \rceil$

Для решения задачи необходимо вычислить фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$. В случае последовательной организации приоритетной очереди необходимо построить матрицу Q, вычислить матрицу N для всевозможных значений s. Для вычисления среднего времени работы с приоритетной очередью необходимо просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = 0$, затем сравнить полученное время для разных значений s и выбрать максимальное. Соответствующее максимальному времени значение s будет оптимальным разбиением памяти для последовательного представления. В случае связанного и страничного представления необходимо построить матрицу Q, вычислить матрицу N и просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = 0$

Для страничного способа организации вычисляется оценка сверху и оценка снизу для реального среднего времени работы Для оценки сверху рассмотрено блуждание в области $x_1 + x_2 < m - \frac{m}{x} + 1$, а для оценки снизу – блуждание в области $x_1 + x_2 < m - \frac{m}{x} - 3(x - 2) + 1$, где слагаемое $3(x - 2)$ – это три страницы, у которых заполнено по одной ячейке.

Сравнивая области блуждания для связанного и страничного способов организации, определено, что для размера памяти $m \in (24, \infty)$ область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$. Поэтому для $m > 24$ в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{6\,m}}{3}$. Также определено, что область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{6}$ Поэтому в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{6}$.

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q, вычисляют матрицу N и среднее время работы для каждого из рассмотренных способов организации приоритетной очереди. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В **четвертой главе** рассмотрена задача оптимального управления тремя очередями в памяти одного уровня. Предложены и исследованы математические модели, описывающие процесс работы с тремя очередями

В задаче исследуются три FIFO-очереди, расположенные в области памяти размера m единиц. В очередях хранятся данные фиксированного размера. Заданы вероятностные характеристики очередей При исключении элемента из пустой очереди не происходит завершение работы. Рассматриваются последовательный, связанный и страничный способы организации очередей. Необходимо определить, как распределить память между очередями в последовательном способе организации, и какой из способов организации очередей является оптимальным В качестве критерия оптимальности рассматривается максимальное среднее время работы с очередями до переполнения выделенного объема памяти.

Пусть текущие длины очередей x_1, x_2 и x_3 В последовательном способе организации каждой очереди выделено некоторое количество единиц памяти из данных m единиц. Пусть s – количество единиц памяти, выделенных первой очереди, z – количество единиц памяти, выделенных второй очереди, тогда $(m - s - z)$ – количество единиц памяти, выделенных третьей очереди. В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $0 \leq x_1 < s + 1$, $0 \leq x_2 < z + 1$, $0 \leq x_3 < m - s - z + 1$, где $x_1 = s + 1$, $x_2 = z + 1$, $x_3 = m - s - z + 1$ – поглощающие экраны, попадание на которые характеризуется как переполнение одной из очередей, а $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Необходимо определить такие значения $0 \leq s \leq m$ и $0 \leq z \leq m - s$, чтобы среднее время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $0 \leq x_1 < s + 1$, $0 \leq x_2 < z + 1$, $0 \leq x_3 < \frac{m}{L} - s - z + 1$, где $x_1 = s + 1$, $x_2 = z + 1$, $x_3 = \frac{m}{L} - s - z + 1$ – поглощающие экраны, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ – отражающие экраны. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Необходимо определить такие значения $0 \leq s \leq \frac{m}{L}$ и $0 \leq z \leq \frac{m}{L} - s$, чтобы среднее время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

В связанном способе организации очередь представлена в виде связанного списка элементов В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{m}{2} + 1$, где $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m}{2} + 1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{m}{L+1} + 1$, где $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m}{L+1} + 1$ – поглощающий экран, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -1$ – отражающие экраны Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран

В страничном способе организации очередь представлена в виде связанного списка страниц размера x единиц памяти. При $x = 2$ получаем связанное представление очередей В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 < m - \frac{m}{x} + 1$, где $x_1 + x_2 + x_3 = m - \frac{m}{x} + 1$ – поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, а $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания до попадания на поглощающий экран.

В каждом из рассмотренных способов организации очередей для описания процесса блуждания построена конечная однородная поглощающая цепь Маркова, предложена нумерация состояний области блуждания, рассмотрена матрица Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные и доказана теорема о структуре матрицы Q при заданной нумерации состояний.

Для случая страничного представления рассмотрена функция $F(x) = m - \frac{m}{x} - 5 \ \frac{x-1}{2}, m > 0, x > 2$ – среднее количество единиц памяти, которые заняты для хранения информации при переполнении какой-либо из очередей. Определен оптимальный размер страницы $x^* = \frac{\sqrt{10\,m}}{5}$. В качестве оптимального размера страницы рассмотрены целочисленные значения $\lfloor x^* \rfloor$ и $\lceil x^* \rceil$.

Для решения задачи необходимо вычислить фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$. В случае последовательной организации очередей необходимо построить матрицу Q, вычислить матрицу N для всевозможных значений s и z. Для вычисления среднего времени работы очередей необходимо просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, затем сравнить полученное время для разных значений s и z и выбрать максимальное. Соответствующие максимальному времени значения s и z будут оптимальным разбиением памяти. В случае связанной и страничной организации очередей необходимо построить матрицу Q, вычислить матрицу N и просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Согласно введенной нумерации это будет последняя строка матрицы N.

Для страничного способа организации трех очередей вычисляется оценка сверху T_{max} и оценка снизу T_{min} для реального среднего времени работы. Для оценки сверху рассмотрено блуждание в области $x_1+x_2+x_3 < m-\frac{m}{x}+1$, а для оценки снизу – блуждание в области $x_1+x_2+x_3 < m-\frac{m}{x}-5(x-2)+1$, где слагаемое $5(x-2)$ – это пять страниц, у которых заполнено по одной ячейке.

Сравнивая области блуждания для связанного и страничного способов организации, определено, что для размера памяти $m \in (40, \infty)$ область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{10\,m}}{5}$. Поэтому для $m > 40$ в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $x = \frac{\sqrt{10\,m}}{5}$. Также определено, что область блуждания в случае связанного представления всегда меньше, чем область блуждания для оценки снизу в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{10}$. Поэтому в случае связанного представления среднее время работы меньше, чем минимальная оценка среднего времени работы в случае страничного представления при $2 < x < \frac{m}{10}$.

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q, вычисляют матрицу N и среднее время работы для каждого из рассмотренных способов организации очередей. В диссертации приведены результаты численных экспериментов.

В **пятой главе** рассмотрена задача оптимального управления тремя очередями на бесконечном времени, когда при переполнении какой-либо из очередей работа не завершается, а поступающие элементы удаляются из очереди Предложены и исследованы математические модели, описывающие процесс работы с тремя очередями на бесконечном времени.

В задаче исследуются три FIFO-очереди, расположенные в области памяти размера m единиц. В очередях хранятся данные фиксированного размера Заданы вероятностные характеристики очередей. При исключении элемента из пустой очереди не происходит завершение работы. Если очередь занимает всю предоставленную ей память, то все последующие элементы, поступающие в нее, отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память (т.е. до тех пор, пока не произойдет исключение элемента из очереди). Такое поведение очереди называется "сбросом хвоста". Рассматриваются последовательный и связанный способы организации трех очередей. Необходимо определить, как распределить память между очередями в последовательном способе организации, и какой из способов организации очередей является оптимальным. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимальная доля потерянных элементов на бесконечном времени работы с очередями

Пусть текущие длины очередей x_1, x_2 и x_3. В последовательном способе организации каждой очереди выделено некоторое количество единиц памяти из данных m единиц. Пусть s – количество единиц памяти, выделенных первой очереди, z – количество единиц памяти, выделенных второй очереди, тогда $(m-s-z)$ – количество единиц памяти, выделенных третьей очереди. В качестве математической модели процесса работы с очередями рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $0 \le x_1 \le s+1$, $0 \le x_2 \le z+1$, $0 \le x_3 \le m-s-z+1$, где $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди. Плоскости $x_1 = s+1$, $x_2 = z+1$, $x_3 = m-s-z+1$ соответствуют ситуациям "сброса хвоста". Попадая на эти плоскости, процесс находится на них до тех пор, пока не произойдет исключение элемента из очереди. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Необходимо минимизировать долю потерянных элементов при переполнении какой-либо из очередей. Другими словами, необходимо определить такие значения $0 \le s \le m$ и $0 \le z \le m - s$, чтобы доля времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста", была минимальной.

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти В качестве математической модели в этом случае рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $0 \le x_1 \le s + 1$, $0 \le x_2 \le z + 1$, $0 \le x_3 \le \frac{m}{L} - s - z + 1$. Плоскости $x_1 = s + 1$, $x_2 = z + 1$, $x_3 = \frac{m}{L} - s - z + 1$ соответствуют ситуациям "сброса хвоста". Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Необходимо определить такие значения $0 \le s \le \frac{m}{L}$ и $0 \le z \le \frac{m}{L} - s$, чтобы доля времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста", была минимальной

В связанном способе организации очередь представлена в виде связанного списка элементов В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \le \frac{m}{2} + 1$, где $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ – отражающие экраны, попадание на которые характеризуется как исключение элемента из пустой очереди. Плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m}{2} + 1$ соответствует ситуациям "сброса хвоста" Попадая на эту плоскость, процесс находится на ней до тех пор, пока не произойдет исключение элемента из какой-нибудь очереди. Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Необходимо найти долю времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста".

Рассмотрен случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти. В качестве математической модели рассмотрено случайное блуждание по целочисленной решетке в трехмерном пространстве $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \le \frac{m}{L+1} + 1$, где $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -1$ – отражающие экраны. Плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m}{L+1} + 1$ соответствует ситуациям "сброса хвоста". Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Необходимо найти долю времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста", и сравнить с долей времени в случае последовательного представления, когда длина информационной части равна L.

В каждом из рассмотренных способов организации очередей для описания процесса блуждания построена конечная регулярная цепь Маркова, предложена нумерация состояний области блуждания, рассмотрена матрица P вероятностей переходов и доказана теорема о структуре матрицы P при заданной нумерации состояний

Для вычисления доли времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста", необходимо решить уравнение $\alpha\ P = \alpha$, где α – предельный вектор для рассматриваемой марковской цепи. По закону больших чисел для регулярной цепи Маркова элемент вектора α_i – это доля времени, которое процесс проводит в состоянии i Для вычисления доли времени нужно просуммировать элементы вектора α, соответствующие состояниям "сброса хвоста" В последовательном представлении при введенной нумерации это последние $(s+z+2)(m-s-z+1)+(s+1)(z+1)$ элементов вектора α, в связанном представлении при введенной нумерации это последние $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ элементов вектора α В последовательном представлении необходимо вычислить долю времени для разных значений s и z, затем выбрать минимальную. Соответствующие минимальной доле времени значения s и z будут оптимальным разбиением памяти.

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые для заданных вероятностных характеристик очередей и размера памяти m вычисляют предельный вектор α и долю времени, проведенного в состояниях "сброса хвоста". В диссертации приведены результаты численных экспериментов

Список опубликованных работ по теме диссертации

Статьи

1 Аксенова Е А , Волкова О.В., Лазутина А.А , Соколов А.В. Методы оптимального управления стеками в двухуровневой памяти.// Труды Института прикладных математических исследований «Методы математического моделирования и информационные технологии», КарНЦ РАН, Петрозаводск, вып.3, 2002, с 127–152 (вклад диссертанта 25 %)

2 Аксенова Е А., Лазутина А.А , Соколов А.В , Тарасюк А.В. Об оптимальном управлении динамическими структурами данных.// Труды V международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» Изд отдел ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003, с. 5–6. (вклад диссертанта 25 %)

3 Аксенова Е.А., Лазутина А.А., Соколов А.В., Тарасюк А.В. Оптимальные методы динамического распределения нестраничной памяти // Труды Первой Всероссийской научной конференции «Методы и средства обработки информации» Изд. отдел ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003, с 74–79. (вклад диссертанта 25 %)

4 Аксенова Е А., Лазутина А.А., Соколов А.В. Исследование немарковской модели управления стеком в двухуровневой памяти // Программирование, №1, 2004, с 37–46. (вклад диссертанта 33 %)

5. Аксенова Е.А., Соколов А.В. Некоторые задачи оптимального управления FIFO–очередями.// Труды Второй Всероссийской научной конференции «Методы и средства обработки информации» Изд. отдел ВМК МГУ им. М В. Ломоносова, 2005, с.318–322.(вклад диссертанта 50 %)

6. Аксенова Е.А. Исследование методов представления трех очередей в памяти одного уровня.// Труды Института прикладных математических исследований «Методы математического моделирования и информационные технологии», КарНЦ РАН, Петрозаводск, вып.6, 2005, с.163–186.

7 Аксенова Е.А., Соколов А.В., Тарасюк А.В. Об оптимальном управлении двумя FIFO–очередями в конечной области памяти.// Системы управления и информационные технологии, №3, 2006, с 62–68. (вклад диссертанта 33 %)

8. Аксенова Е А. Оптимальное управление FIFO–очередями на бесконечном времени.// Межвуз. сб «Стохастическая оптимизация в информатике». Изд-во С.-Петербургского университета, вып 2, 2006, с.71–76

9. Аксенова Е.А., Соколов А.В. Оптимальное управление двумя параллельными стеками в двухуровневой памяти.// Дискретная математика, №1, 2007, с.67–75 (вклад диссертанта 66 %)

Тезисы докладов

1. Sokolov A V., Aksenova E.A., Lazutina A A., Tarasyuk A.V Mathematical models of dynamic data structure.// V international congress on mathematical modeling. Book of abstract, vol. II, JINR, Dubna 2002, p. 127. (вклад диссертанта 25 %)

2. Аксенова Е.А., Лазутина А.А., Соколов А.В. Об оптимальном распределении памяти для стеков.// Обозрение прикладной и промышленной математики, т 10, вып.1, 2003, с.86–87. (вклад диссертанта 33 %)

3. Аксенова Е.А , Лазутина А.А , Соколов А В Об оптимальных методах представления динамических структур данных.// Обозрение прикладной и промышленной математики, т 10, вып 2, 2003, с 375–376.(вклад диссертанта 33 %)

4. Аксенова Е.А , Лазутина А.А., Соколов А В. Анализ методов представления динамических структур данных.// Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 11, вып.2, 2004, с 233–234. (вклад диссертанта 33 %)

5 Аксенова Е.А., Соколов А.В Об оптимальном управлении двумя FIFO–очередями // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.· Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004, с.167–169. (вклад диссертанта 50 %)

6 Аксенова Е.А., Соколов А.В Оптимальные методы управления FIFO–очередями в памяти одного уровня.// Тезисы докладов XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005, с 8 (вклад диссертанта 50 %)

7. Sokolov A V., Aksenova E.A Lazutina A.A , Tarasyuk A.V. Probability models and optimal algorithms of dynamic data structure control.// Extended abstracts, PTAP, Petrozavodsk, 2006, pp 57–58. (вклад диссертанта 25 %)

8. Аксенова Е.А Некоторые задачи управления динамическими структурами данных.// Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007, с 201–203.

Изд лиц № 00041 от 30 08 99 Формат 60×84 $^{1}/_{16}$
Бумага офсетная Гарнитура «Times»
Уч -изд л 1,0 Усл печ л 1,3 Подписано в печать 02 10 07
Тираж 100 экз Изд № 51 Заказ № 686

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
185003, Петрозаводск, пр А Невского, 50